Centrale TSI 2009 - Mathématiques 2

Partie I - Matrices symétriques

I.A -

I.A.1) $\underline{\chi_A} = X^2 - \mathrm{tr(A)X + det(A)} \underline{= \mathrm{X^2 - (c+f)X + cf - de}}$.

I.A.2) Les valeurs propres étant racines de χ_A, l'on a, si λ et μ sont les valeurs propres de A :

$$\boxed{\lambda + \mu = \mathrm{tr(A)} \text{ et } \lambda\mu = \mathrm{det(A)}}$$

.

I.A.3) Les valeurs propres de A sont réelles car la matrice est symétrique réelle. Elles sont non nulles et de même signe si et seulement si $\det(A) > 0$.

Dans ce cas, ce signe commun est celui de leur somme, qui est aussi celui de la trace de A.

Donc :

$$\boxed{A \text{ admet deux valeurs propres strictement positives } \Leftrightarrow \mathrm{tr(A)} > 0 \text{ et } \det(\mathrm{A}) > 0}$$

.

I.B -

I.B.1)

a)

$$\boxed{\begin{array}{lll} M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & M_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

b) Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} a_{ij} M_{i,j}.$$

D'où $(M_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

La famille est évidemment libre. D'où

$$\boxed{(M_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq 3} \text{ est une base de } \mathcal{S}_3(\mathbb{R})}$$

I.B.2)

a) Le nombre de matrices $M_{i,j}$ est égal au nombre de coefficients sur et au-dessus de la diagonale d'une matrice $n \times n$, c'est-à-dire $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} M_{i,j}.$$

Donc $\underline{A \text{ est combinaison linéaire des matrices } M_{i,j}.}$

b) $(M_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est par ailleurs évidemment une famille libre et donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

D'où :

$$\boxed{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}}$$

I.C -

I.C.1) $q(V+V') = {}^t(V+V'A(V+V')$
$= {}^tVAV + {}^tV'AV + {}^tVAV' + {}^tV'AV'$
$= q(V) + 2{}^tVAV' + q(V')$ car ${}^tV'AV = {}^t({}^tV'AV) = {}^tV\ {}^tAV' = {}^tVAV'$

D'où :

$$\boxed{{}^tVAV' = \frac{q(V+V') - q(V) - q(V')}{2}}$$

I.C.2) Posons $V = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$-ième ligne et $V' = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$-ième ligne.

On a alors :

$$\underline{{}^tVAV'} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ième colonne}}}{1} & \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$
$$\underline{= a_{ij}}$$

I.C.3) Notons q_1 l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $V \in \mathbb{R}^n$ associe ${}^tVA_1V$ et q_2 définie de même manière à l'aide de la matrice A_2.

Posons, pour i et $j \in \{1, \cdots, n\}$, $V_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$-ième ligne et $V_j = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$-ième ligne.

Posons $A_1 = (a1_{i,j})$ et $A_2 = (a2_{ij})$.
L'hypothèse équivaut alors à $q_1 = q_2$.
On a alors :

$$\begin{aligned} a1_{ij} &= {}^tV_iA_1V_j \\ &= \frac{q_1(V_i+V_j) - q_1(V_i) - q_1(V_j)}{2} \\ &= \frac{q_2(V_i+V_j) - q_2(V_i) - q_2(V_j)}{2} \\ &= {}^tV_iA_2V_j \\ &= a2_{ij} \text{ et} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_1 = A_2}$$

I.C.4)

a) La matrice A_1, symétrique réelle est diagonalisable et il existe $P \in O(n)$, $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $D = {}^tPA_1P \Leftrightarrow A_1 = PD{}^tP$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

On a alors ${}^tVA_1V = {}^tVPD{}^tPV$.
En posant $W = {}^tPV$, l'on à la fois $W \neq 0$ car $V \neq 0$ et ${}^tP$ est inversible, et ${}^tVA_1V = {}^tWDW$.
Donc :

$$\boxed{\exists W \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,,\ {}^t\!VA_1V = {}^t\!WDW \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

b) Si l'on pose $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ w_n \end{pmatrix}$, ${}^t\!VA_1V = {}^t\!WDW = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 > 0$ car tous les λ_i sont strictement positifs et l'un au moins des w_i est non nul. Donc :

$$\boxed{{}^t\!VA_1V > 0}$$

c) On a alors ${}^t\!\left(\frac{V}{r}\right) A_1 \left(\frac{V}{r}\right) = \frac{{}^t\!VA_1V}{r^2} = 1 \ \Rightarrow {}^t\!\left(\frac{V}{r}\right) A_2 \left(\frac{V}{r}\right) = 1$
$\Rightarrow {}^t\!VA_2V = r^2 = {}^t\!VA_1V$

d) On a montré précédemment que pour tout vecteur non nul V, ${}^t\!VA_1V = r^2 = {}^t\!VA_2V$. Cette propriété vaut aussi pour $V = 0$ et $\forall V \in \mathbb{R}^n$, ${}^t\!VA_1V = {}^t\!VA_2V$. D'après I.C.3),

$$\boxed{A_1 = A_2}$$

Partie II - Quelques propriétés de l'ellipse

II.A -

II.A.1) L'endomorphisme f, symétrique, est diagonalisable et il existe une base orthonormée directe de $(\overrightarrow{\Pi})$: $(\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$dans la quelle la matrice f s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Alors dans le repère $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$, si M a pour coordonnées (x, y),
$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ et

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ a pour équation } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1}$$

II.A.2) Comme
✓ les valeurs propres de f sont λ_1 et λ_2,
✓ $\mathcal{C}_f$ est une ellipse $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est une ellipse } \Leftrightarrow \text{ les valeurs propres de } f \text{ sont strictement positives}}$$

II.B -

II.B.1) L'ellipse $\mathcal{E}$ admet dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont deux réels strictement positifs. Soit f l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$. $\underline{f \text{ est alors un endomorphisme symétrique}}$ puisque sa matrice dans une base orthonormée est symétrique. $\underline{\text{Ses valeurs propres sont } \frac{1}{a^2} \text{ et } \frac{1}{b^2}, \text{ strictement positives.}}$

On a alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = 1$ et

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{C}_f}$$

II.B.2) Soit g un autre endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives tel que $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f$. Notons A_1 et A_2 les matrices de f et g dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, q_1 et q_2 les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ de matrices respectives A_1 et A_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $V \in \mathbb{R}^2$ et M le point de coordonnées V dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; on a alors $q_1(V) = \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM})$ et $q_2(V) = \overrightarrow{OM} \cdot g(\overrightarrow{OM})$.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g$, cela signifie que : $q_1(V) = 1 \Rightarrow M \in C_f$
$\Rightarrow M \in C_f$
$\Rightarrow q_2(V) = 1$

Comme les valeurs propres de A_1 (qui sont celles de f) sont strictement positives, d'après la question I.C.4), $A_1 = A_2 \Leftrightarrow f = g$.

$$\boxed{\text{Il y a donc unicité de l'endomorphisme } f \text{ associé à } \mathcal{E}}$$

II.C -

II.C.1) Les trois matrices données sont bien symétriques et forment évidemment une famille libre de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

II.C.2) Comme la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est 3, la famille précédente est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

La matrice M_f de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est symétrique réelle. Donc :

$\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ M_f = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_f = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix}$.

J'ai montré :

$$\boxed{\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ M_f = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix}}$$

II.C.3) D'après la question I.A.3), les valeurs propres de M_f, symétrique réelle, sont strictement positives si et seulement si :

$\mathrm{tr}\ \mathrm{M_f} > 0$ et $\det M_f > 0$ ce qui est équivalent à :

$2\gamma > 0$ et $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 > 0$. D'où :

$$\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres réelles et strictement positives } \Leftrightarrow \gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2 \text{ et } \gamma > 0.}$$

II.D -

II.D.1) Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$,

$\mathcal{C}_f$ a pour équation $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

L'intérieur de l'ellipse étant caractérisé par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, l'on a :

$$\boxed{\forall M \in (\Pi),\ M \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) \leq 1}$$

II.D.2) Si M a pour coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,

$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy$. Donc, pour tout point M de (Π), de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,

$$\boxed{M \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{E} \Leftrightarrow (\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy \leq 1}$$

II.D.3) Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de f.

Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$, $\mathcal{E}$ a pour équation $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

L'aire de $\mathcal{E}$ est alors $\pi ab = \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\det f}}$.

$$\boxed{\text{L'aire de } \mathcal{E} \text{ est donc } \frac{\pi}{\sqrt{\det f}}}$$

II.D.4) Le déterminant d'un endomorphisme étant celui de sa matrice dans une base quelconque,

$$\boxed{\text{L'aire de } \mathcal{E} \text{ est donc } \frac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}}$$

Partie III - Existence d'une ellipse optimale

III.A -

III.A.1) Notons $\mathcal{E}$ une ellipse convenable, (α, β, γ) le triplet associé à $\mathcal{E}$, (x_l, y_l) les coordonnées de P_l, $l = 1, \cdots, k$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Si P_i ou P_j est égal à O, on peut supprimer ce point intérieur à l'ellipse.

Sinon, puisque O, P_i, P_j sont alignés, $\exists t \in [-1, 1]$, $\overrightarrow{OP_j} = t\overrightarrow{OP_i}$ (par exemple car si $|t|) > 1$, en échangeant i et j, $\overrightarrow{OP_i} = \dfrac{1}{t}\overrightarrow{OP_j}$ avec $\left|\dfrac{1}{t}\right| < 1$).

Comme P_i est à l'intérieur de l'ellipse :

$$\begin{aligned}
(\gamma - \alpha)x_i^2 + (\gamma + \alpha)y_i^2 - 2\beta x_i y_i \leq 1 \quad & \Rightarrow t^2\left((\gamma - \alpha)x_i^2 + (\gamma + \alpha)y_i^2 - 2\beta x_i y_i\right) \leq t^2 \leq 1 \\
& \Rightarrow (\gamma - \alpha)x_j^2 + (\gamma + \alpha)y_j^2 - 2\beta x_j y_j \leq 1 \\
& \Rightarrow P_j \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{E}.
\end{aligned}$$

D'où, en supprimant le point P_j, $\mathcal{E}$ est encore convenable.

$$\boxed{\text{En supprimant le point } P_j, \ \text{ on ne change pas l'ensemble des ellipses convenables.}}$$

III.A.2) Comme $x_i = \rho_i \cos(\theta_i)$ et $y_i = \rho_i \sin(\theta_i)$, P_i est à l'intérieur de $\mathcal{E}$ si et seulement si :
$(\gamma - \alpha)\rho_i^2 \cos^2(\theta_i) + (\gamma + \alpha)\rho_i^2 \sin^2(\theta_i) - 2\beta \rho_i^2 \cos(\theta_i)\sin(\theta_i) \leq 1 \Leftrightarrow$
$\gamma \rho_i^2 - \alpha \rho_i^2 \cos(2\theta_i) - \beta \rho_i^2 \sin(2\theta_i) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\gamma \leq \alpha \cos(2\theta_i) + \beta \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}}$$

puisque $\rho_i \neq 0$.

III.A.3) <u>Cette inégalité est une égalité lorsque P_i se trouve sur $\mathcal{E}$</u>.

III.B - Si l'on note $R = \max\{OP_i \,/ i \in \{1, \cdots, k\}\}$, <u>l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ est convenable.</u>

III.C -

III.C.1) L'aire de $\underline{E}_1$ vaut $\dfrac{\pi}{\sqrt{r^2\gamma_0^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}} \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma_0^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}}$. D'où :

$$\boxed{\text{L'aire de } \mathcal{E}_1 \text{ est inférieure à celle de } \mathcal{E}_0}$$

III.C.2) L'on sait que pout tout $i \in \{1, ..., k\}$, $\gamma_0 \leq \alpha_0 \cos(2\theta_i) + \beta_0 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2}$.

Notons $m = \min\left\{\alpha_0 \cos(2\theta_i) + \beta_0 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2} \,/ i \in \{1, \cdots, k\}\right\}$. Alors $\gamma_0 \leq m$.

Posons $r = \dfrac{m}{\gamma_0}$ (cela est possible car $\gamma_0 > 0$ d'après la question II.C.3)), $\gamma_1 = r\gamma_0$, $\alpha_1 = \alpha_0$ et $\beta_1 = \beta_0$.

On a alors $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_1^2 > \alpha_1^2 + \beta_1^2$, ce qui montre l'existence de $\mathcal{E}_1$ associée à $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

En outre, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, $\gamma_1 = m \leq \alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2}$, ce qui montre que $\mathcal{E}_1$ est convenable et $\gamma_1 = m$, qui est atteint pour une valeur s de $\{1, ..., k\}$ et donc $\gamma_1 = \alpha_1 \cos(2\theta_s) + \beta_1 \sin(2\theta_s) + \dfrac{1}{\rho_s^2}$, ce qui montre que $\mathcal{E}_1$ passe par P_s.

$$\boxed{\text{On peut donc choisir } r \text{ tel que } \mathcal{E}_1 \text{ soit convenable et passe par l'un des points } P_1, ..., P_k}$$

III.D -

III.D.1) Posons $\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda,\ \beta_2 = \beta_1,\ \gamma_2 = \gamma_1 + \lambda$.

Comme $\gamma_1 > 0$ et $\lambda \geq 0$, $\gamma_2 > 0$.

Comme $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leq \gamma_1^2,\ |\alpha_1| \leq \gamma_1$.

En outre
$$\begin{aligned} \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= (\alpha_1 + \lambda)^2 + \beta_1^2 \\ &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2\lambda\alpha_1 + \lambda^2 \\ &\leq \gamma_1^2 + 2\lambda\alpha_1 + \lambda^2 \\ &\leq \gamma_1^2 + 2\lambda\gamma_1 + \lambda^2 \text{ (car } |\alpha_1| < \gamma_1) \\ &\leq (\gamma_1 + \lambda)^2 = \gamma_2^2 \end{aligned}$$

Donc $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ est associé à une ellipse $\mathcal{E}_2$.

L'on sait que $\gamma_1 = \alpha_1 + \dfrac{1}{\rho_1^2}$ puisque $\mathcal{E}_1$ passe par P_1.

On a alors $\gamma_1 + \lambda = \alpha_1 + \lambda + \dfrac{1}{\rho_1^2} \Rightarrow \gamma_2 = \alpha_2 + \dfrac{1}{\rho_1^2}$, ce qui montre que $\mathcal{E}_2$ passe par P_1.

L'aire de $\mathcal{E}_2$ est $\dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 + 2\lambda(\gamma_1 - \alpha_1))}}$.

Or $2\lambda(\gamma_1 - \alpha_1) \geq 0$.

D'où l'aire de $\mathcal{E}_2$ est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_1$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le triplet } (\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda) \text{ est donc associé à une ellipse } \mathcal{E}_2 \text{ de centre } O \text{ passant par } P_1 \\ \text{et dont l'aire est inférieure ou égale à celle de } \mathcal{E}_1.\end{array}}$$

III.D.2) Soit $i \in \{2, ...k\}$. $1 - \cos(2\theta_i) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos(2\theta_i) = 0 \Leftrightarrow \theta_i = 0\ [\pi]$, ce qui signifie que $P_i \in (OP_1)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc :

$$\boxed{\forall i \in \{2, ..., k\},\ 1 - \cos(2\theta_i) > 0}$$

III.D.3) L'on sait que $\mathcal{E}_1$ est convenable, donc $\forall i \in \{2, ..., k\},\ \gamma_1 \leq \alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\varrho_i^2}$.

Dire que $\mathcal{E}_2$ est convenable, c'est dire que $\forall i \in \{2, ..., k\},\ \gamma_2 \leq \alpha_2 \cos(2\theta_i) + \beta_2 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2} \Leftrightarrow$ $\lambda(1 - \cos(2\theta_i)) \leq \alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2} - \gamma_1$.

Choisissons $\lambda = \min\limits_{i \in \{2, ..., k\}} \dfrac{\alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2} - \gamma_1}{1 - \cos(2\theta_i)}$. Alors $\lambda \geq 0$. Pour cette valeur de λ, $\mathcal{E}_2$ est convenable et $\exists s \in \{2, ..., k\},\ \lambda = \dfrac{\alpha_1 \cos(2\theta_s) + \beta_1 \sin(2\theta_s) + \dfrac{1}{\rho_s^2} - \gamma_1}{1 - \cos(2\theta_s)}$, ce qui signifie que $\mathcal{E}_2$ passe par P_s.

$$\boxed{\text{On peut donc trouver } \lambda \text{ tel que } \mathcal{E}_2 \text{ soit convenable et passe par l'un des points } P_2, ...P_k}$$

III.E -

III.E.1) $(\alpha, \beta\,\gamma)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \dfrac{1}{\rho_1^2} \\ \gamma = \alpha\cos(2\theta_2) + \beta\sin(2\theta_2) + \dfrac{1}{\rho_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \gamma = \dfrac{1}{\rho_1^2} \\ -\alpha\cos(2\theta_2) + \gamma = \beta\sin(2\theta_2) + \dfrac{1}{\rho_2^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1-\cos(2\theta_2)) = -\dfrac{1}{\rho_1^2} + \dfrac{1}{\rho_2^2} + \beta\sin(2\theta_2) \\ \gamma(1-\cos(2\theta_2)) = -\dfrac{\cos(2\theta_2)}{\rho_1^2} + \beta\sin(2\theta_2) + \dfrac{1}{\rho_2^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{-\dfrac{1}{\rho_1^2} + \dfrac{1}{\rho_2^2} + \beta\sin(2\theta_2)}{1-\cos(2\theta_2)} = g(\beta) \\ \gamma = \dfrac{-\dfrac{\cos(2\theta_2)}{\rho_1^2} + \beta\sin(2\theta_2) + \dfrac{1}{\rho_2^2}}{1-\cos(2\theta_2)} = h(\beta) \end{cases}$$

Donc, les triplets (α, β, γ) qui vérifie $\gamma = \alpha\cos(2\theta_i) + \sin(2\theta_i) + \dfrac{1}{\rho_i^2}$ pour $i = 1$ et 2 sont les triplets de la forme $(g(\beta), \beta, h(\beta))$ où

$$\boxed{\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{et } h: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \beta \to \dfrac{-\dfrac{1}{\rho_1^2} + \dfrac{1}{\rho_2^2} + \beta\sin(2\theta_2)}{1-\cos(2\theta_2)} & & \beta \to \dfrac{-\dfrac{\cos(2\theta_2)}{\rho_1^2} + \beta\sin(2\theta_2) + \dfrac{1}{\rho_2^2}}{1-\cos(2\theta_2)} \end{array}}$$

III.E.2) On constate que g et h sont des fonctions polynômiales du premier degré de β de même coefficient dominant $\dfrac{\beta\sin(2\theta_2)}{1-\cos(2\theta_2)}$.

Donc pour un triplet (α, β, γ) de la forme $(g(\beta), \beta, h(\beta))$,

$$\boxed{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 \text{ est un polynôme du second degré } P(\beta) \text{ dont le terme de plus haut degré est } -\beta^2.}$$

III.E.3) Comme $\mathcal{E}_2$ passe par P_1 et P_2, $\alpha_2 = g(\beta_2)$ et $\gamma_2 = h(\beta_2)$.

L'aire d'une ellipse associée à (α, β, γ) est $\dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}$; donc elle est inférieure à celle de $\mathcal{E}_2$ lorsque $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ est supérieur à $P(\beta_2)$ et si elle passe par P_1 et P_2, lorsque $P(\beta) \geq P(\beta_2)$; c'est à dire quand $\beta \in [\beta_2 \underset{\rightleftarrows}{,} \beta_3]$ où β_3 est la seconde solution de l'équation du second degré $P(\beta) = P(\beta_2)$ d'inconnue β. En effet P est croissante sur $]-\infty, \dfrac{\beta_2+\beta_3}{2}]$ et décroissante sur $[\dfrac{\beta_2+\beta_3}{2}, +\infty[$. J'ai montré :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Un triplet } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est associé à une ellipse convenable passant par } P_1 \text{ et } P_2 \\ \text{d'aire inférieure ou égale à celle de } \mathcal{E}_2 \text{ si et seulement si } \beta \in [\beta_2 \underset{\rightleftarrows}{,} \beta_3] \end{array}}$$

III.E.4) Les ellipses convenables associées à (α, β, γ) passant par P_1 et P_2 d'aire minimale vérifient donc $[\beta_2 \underset{\rightleftarrows}{,} \beta_3]$ et un système d'inéquations linéaires du second degré, vérifié par β_2, qui traduit que chacun des P_i pour $i = 3, ..., k$ est à l'intérieur de $\mathcal{E}_2$. Donc, elles vérifient $\beta \in K$, où K est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel P admet un minimum. Donc :

$$\boxed{\text{Parmi les ellipses convenables passant par } P_1 \text{ et } P_2, \text{ il en existe une d'aire minimale.}}$$

III.F - On a vu qu'il existe des ellipses convenables d'aires minimales passant par deux points non alignés avec O. Le nombre de points P_i étant fini, il n'existe qu'un nombre fini d'ellipses convenables $\mathcal{E}_1$, ... , $\mathcal{E}_p$, passant par deux points et d'aires minimales (pour les ellipses convenables passant par ces deux points), respectivement $a_1, ..., a_p$. Prenons parmi ces ellipses l'une : $\mathcal{E}$, dont l'aire est $\min\limits_{i \in \{1,...,p\}} a_i$.

Comme toute ellipse optimale passe par deux points non alignés avec O (sinon on pourrait d'après les questions III.C.1 et III.D.3 trouver une ellipse convenable d'aire inférieure), $\mathcal{E}$ est optimale. Donc :

$$\boxed{\text{Il existe une ellipse optimale et elle passe au moins par deux des points } P_i}$$

Partie IV - Unicité de l'ellipse optimale

IV.A -

IV.A.1) La section de $\mathcal{H}_0$ par le plan d'équation $X = 0$ est la réunion des deux droites sécantes d'équations respectives $\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Z = Y \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Z = -Y \end{array} \right.$.

De même, la section de $\mathcal{H}_0$ par le plan d'équation $Y = 0$ est la réunion des deux droites sécantes d'équations respectives $\left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \\ Z = X \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \\ Z = -X \end{array} \right.$.

La section de $\mathcal{H}_0$ par le plan d'équation $Z = 1$ est le cercle d'équation $\left\{ \begin{array}{l} Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{array} \right.$.

IV.A.2)

$$\boxed{\mathcal{H}_0 \text{ est un cône de révolution d'axe } (\Omega Z) \text{ et de sommet } O}$$

IV.A.3) Le triplet (α, β, γ) est associé à une ellipse si et seulement si $\gamma > 0$ et $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$.

$$\boxed{\text{Les points de coordonnées } (\alpha, \beta, \gamma), \text{ associés à une ellipse, sont donc les points situés au-dessus de } \mathcal{H}_0^+.}$$

IV.B -

IV.B.1)

$$\boxed{\mathcal{T}_i \text{ est un plan.}}$$

IV.B.2)

$$\boxed{\text{Les points de l'espace vérifiant } Z \leq X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{\rho_i^2} \text{ sont situés en-dessous de } \mathcal{T}_i.}$$

IV.C -

IV.C.1)

$$\boxed{\mathcal{K} \text{ est donc l'ensemble des coordonnées des points situés au-dessus de } \mathcal{H}_0^+ \text{ et en-dessous des } k \text{ plans } \mathcal{T}_i.}$$

IV.C.2) Soient M_1 et M_2 de coordonnées respectives (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) appartenant à $\mathcal{K}$. Leur milieu I a pour coordonnées $(u, v, w) = \left(\dfrac{X_1 + X_2}{2}, \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}, \dfrac{Z_1 + Z_2}{2}\right)$.

On a alors :

$\forall i \in \{1, ..., k\}$,

$$w - u\cos 2\theta_i - v\sin 2\theta_i - \frac{1}{\rho_i^2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\left[\left(Z_1 - X_1\cos 2\theta_i - Y_1 \sin 2\theta_i - \dfrac{1}{\rho_i^2}\right)\right. \\ \left. + \left(Z_2 - X_2\cos 2\theta_i - Y_2\sin 2\theta_i - \dfrac{1}{\rho_i^2}\right)\right] \end{array}\right.$$

D'où $w - u\cos 2\theta_i - v\sin 2\theta_i - \dfrac{1}{\rho_i^2} \leq 0$ et I est situé en-dessous des plans $\mathcal{T}_i$.

Par ailleurs, $\begin{aligned} |X_1X_2 + Y_1Y_2| &\leq (X_1^2 + Y_1^2)^{1/2}(X_2^2 + Y_2^2)^{1/2} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq Z_1 Z_2 \end{aligned}$

et

$$\begin{aligned} w^2 - u^2 - v^2 &= \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(Z_1^2 - X_1^2 - Y_1^2\right) + \frac{1}{4}\left(Z_2^2 - X_2^2 - Y_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(Z_1Z_2 - X_1X_2 - Y_1Y_2\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où I est situé au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$.

On a montré que :

$$\boxed{\text{Le milieu de } [M_1, M_2] \text{ appartient à } \mathcal{K}}$$

IV.D -

IV.D.1) La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $X = 0$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} X = O \\ Z^2 - Y^2 = l \end{cases}$

On reconnaît l'équation d'une <u>hyperbole équilatère</u> du plan (ΩYZ) centrée en Ω et d'axe transverse (ΩZ).

La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $Y = 0$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} Y = O \\ Z^2 - X^2 = l \end{cases}$

On reconnaît l'équation d'une <u>hyperbole équilatère</u> du plan (ΩXZ) centrée en Ω et d'axe transverse (ΩZ).

La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $Z = \sqrt{l}$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 0 \\ Z = \sqrt{l} \end{cases}$

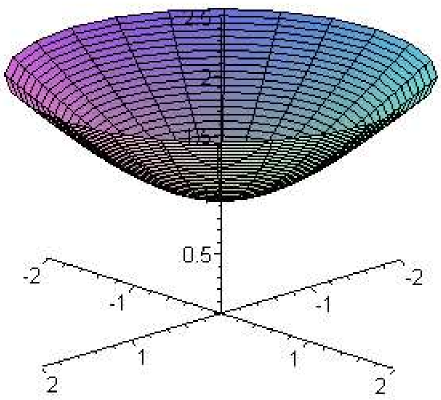
Cette <u>section est réduite au point de coordonnées $(0, 0, \sqrt{l})$</u>.

La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $Z = 2\sqrt{l}$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 3l \\ Z = 2\sqrt{l} \end{cases}$

On reconnaît le <u>cercle</u> du plan d'équation $Z = 2\sqrt{l}$ centré au point de coordonnées $(0, 0, 2\sqrt{l})$ de rayon $\sqrt{3l}$.

IV.D.2) <u>$\mathcal{H}_l$ est un hyperboloïde à deux nappes, de révolution d'axe (ΩZ).</u>

IV.D.3)



IV.E -

IV.E.1) Le point M_3 est situé au-dessus de $\mathcal{H}_l^+$.

IV.E.2) Les points de $\mathcal{H}_l^+$ étant ceux qui vérifient $Z = \sqrt{l + X^2 + Y^2}$, les coordonnées de M_3 vérifient $\gamma_3 > \sqrt{l + \alpha_3^2 + \beta_3^2} \Leftrightarrow$ (puisque $\gamma_3 > 0$)

$$\boxed{\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2 > l}$$

IV.F - Supposons qu'il y ait deux ellipses optimales distinctes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ associées respectivement aux deux triplets $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et considérons l'ellipse $\mathcal{E}_3$ associée au triplet $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = \dfrac{1}{2}\left[(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\right]$.

D'après IV.E., on a bien affaire à une ellipse car $\gamma_3 > 0$ et $\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2 > l > 0$.

D'après IV.C.2), elle est encore convenable.

D'après IV.E.2), son aire est $\dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}} < \dfrac{\pi}{\sqrt{l}} =$ aire de $\mathcal{E}_1 =$ aire de $\mathcal{E}_2$.

D'où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ne sont pas optimales. On a montré :

$$\boxed{\text{Il y a unicité de l'ellipse optimale.}}$$

V.F - Exemples

V.A.1) Si l'ellipse optimale n'était pas symétrique par rapport à Δ, sa symétrique par rapport à Δ serait aussi optimale, ce qui contredit son unicité. Donc :

$$\boxed{\text{L'ellipse optimale est symétrique par rapport à } \Delta}$$

V.A.2)

a) $\{P_1, P_2\}$ est symétrique par rapport à (Ox). Donc l'ellipse optimale est symétrique par rapport à (Ox). Comme elle est centrée en O, elle est aussi symétrique par rapport à (Oy). Donc :

$$\boxed{\text{L'équation de l'ellipse optimale est de la forme } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse optimale. Choisissons $a > 0$ et $b > 0$. P_1 et P_2 vérifient l'équation de $\mathcal{E}$. Donc $\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$, ce qui montre que $\exists \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2}{a} = \cos\alpha \\ \dfrac{1}{b} = \sin\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{2}{\cos\alpha} \\ b = \dfrac{1}{\sin\alpha} \end{array} \right\}$

D'où l'aire de $\mathcal{E}$ vaut $\dfrac{2\pi}{\cos\alpha\sin\alpha} = \dfrac{4\pi}{\sin 2\alpha}$.
Cette aire est minimum quand $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ et

$$\boxed{a = 2\sqrt{2} \text{ et } b = \sqrt{2}}$$

V.B -

V.B.1) $P_4 \in [P_1, P_2]$. Il s'agit donc de vérifier que l'intérieur d'une ellipse est convexe. On peut le vérifier sur l'équation réduite dans un repère orthonormé : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ intérieurs à l'ellipse. Soit $M(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in [M_1, M_2]$ $(t \in [0,1])$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{(tx_1+(1-t)x_2)^2}{a^2} + \frac{(ty_1+(1-t)y_2)^2}{b^2} &= t^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right) + (1-t)^2\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)\\ &\quad +2t(1-t)\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\right)\\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)\left[\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)^{1/2}\right]\\ &\quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &\leq t^2+(1-t)^2+2t(1-t) = (t+(1-t))^2 = 1\end{aligned}$$

D'où M est intérieur à l'ellipse.
Donc comme P_1 et P_2 sont intérieurs à l'ellipse optimale, P_4 l'est aussi et

$$\boxed{\text{Pour rechercher l'ellipse optimale, on peut supprimer le point } P_4.}$$

V.B.2) P_1, P_2, P_3 ont pour coordonnées polaires respectives $(3, 0)$, $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

V.B.3) Les trois inégalités du III.A.2) s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}\gamma \leq \alpha + \dfrac{1}{9}\\ \gamma \leq \dfrac{\alpha}{2} + \beta\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{12}\\ \gamma \leq -\alpha + 4\end{array}}$$

V.B.4) Soit $\mathcal{E}$ ellipse de centre O passant par P_1 et P_3. Montrons qu'elle ne contient pas P_2.
D'après ce qui précède, si elle associée au triplet (α, β, γ), l'on a :

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \alpha + \dfrac{1}{9}\\ \gamma = -\alpha + 4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\gamma = \dfrac{37}{18}\\ \alpha = \dfrac{35}{18}\end{array}\right.$$

Or $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 > 0 \Rightarrow \beta^2 < \gamma^2 - \alpha^2 = \dfrac{37^2 - 35^2}{18^2} = \dfrac{4}{9}$, ce qui montre : $|\beta| < \dfrac{2}{3}$.
Par ailleurs P_2 intérieur à $\mathcal{E}$ équivaut à :

$$\begin{aligned}\gamma \leq \frac{\alpha}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{12} \quad &\Leftrightarrow \frac{37}{18} - \frac{35}{36} - \frac{1}{12} \leq \beta\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \beta \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Or β ne peut être à la fois inférieur à $\dfrac{2}{3}$ et supérieur ou égal à $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'ellipse de centre } O\text{, passant par } P_1 \text{ et } P_3 \text{ et contenant } P_2.}$$

V.B.5) Lorsque P_1 et $P_2 \in \mathcal{E}$,

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \alpha + \dfrac{1}{9} \\ \gamma = \dfrac{\alpha}{2} + \beta\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{12} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{1}{18} + \beta\sqrt{3} \\ \alpha = -\dfrac{1}{18} + \beta\sqrt{3} \end{array}\right.$$

D'où $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \left(\dfrac{1}{18} + \beta\sqrt{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{18} + \beta\sqrt{3}\right)^2 - \beta^2 = -\beta^2 + \dfrac{2\beta\sqrt{3}}{9}$ et

$$\boxed{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = -\beta^2 + \frac{2\beta\sqrt{3}}{9}}$$

V.B.6)

$$\boxed{\text{Cette expression est maximale pour } -2\beta + \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{9}.}$$

V.B.7) On a alors :

$\alpha = -\dfrac{1}{18} + \beta\sqrt{3} = -\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{18}$ et

$\gamma = \dfrac{1}{18} + \beta\sqrt{3} = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{18}$.

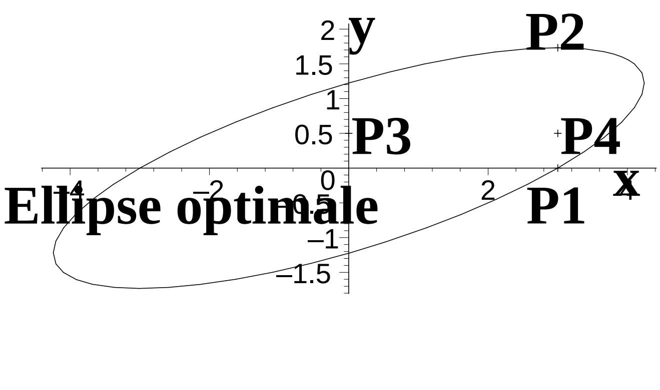
D'où l'équation de l'ellipse optimale :

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{2y^2}{3} - \frac{2\sqrt{3}xy}{9} = 1}$$

Cette équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}(x - y\sqrt{3})^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \quad & \Leftrightarrow \frac{1}{9}(x - y\sqrt{3})^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \exists\varphi \in [0, 2\pi], \ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x - y\sqrt{3}}{3} = \cos\varphi \\ \dfrac{y\sqrt{3}}{3} = \sin\varphi \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \exists\varphi \in [0, 2\pi], \ \left\{\begin{array}{l} x = 3(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ y = \sqrt{3}\sin\varphi \end{array}\right. \end{aligned}$$

D'où la représentation :



$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr