Centrale TSI 2008 - Mathématiques 2

Partie I - Étude de deux applications

I.A.1) $\Phi(A)$ est la surface d'équation cartésienne $z = 0$, c'est à dire le plan (xOy).

I.A.2) $\Phi(A)$ est la surface d'équation cartésienne $z = x^2 + y^2$.
C'est un paraboloïde elliptique de révolution d'axe (Oz).

I.A.3) $\Phi(A)$ a pour équation cartésienne
$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 2xy + 2xy + y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$
$\Phi(A)$ a pour équation cartésienne $z = x^2 - y^2$.
On reconnaît l'équation cartésienne réduite d'un paraboloïde hyperbolique.

I.B.1)
✓ $\forall A \in E,\ A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + A = \dfrac{A - {}^tA}{2}$. Cela montre que $E = \mathcal{S}_2 + \mathcal{A}_2$.

✓ $\forall A \in E,\ ({}^tA = A \text{ et } {}^tA = -A) \Rightarrow A = 0$. Cela montre que $\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{A}_2 = \{0\}$.

Donc :

$$\boxed{E = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2}$$

I.B.2)
✓ Supposons $\forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^tXAX = 0$.
Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient : ${}^tXAX = a = 0$.
Pour $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient : ${}^tXAX = d = 0$.
Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient : ${}^tXAX = a + b + c + d = b + c = 0$.
D'où $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2$.

✓ Si $A \in \mathcal{A}_2,\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^t({}^tXAX) = {}^tXAX$ (matrice 1×1)
$$\begin{aligned} &\Rightarrow {}^tX{}^tAX = {}^tXAX \\ &\Rightarrow -{}^tXAX = {}^tXAX \\ &\Rightarrow {}^tXAX = 0. \end{aligned}$$
Donc $\forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^tXAX = 0$.

J'ai montré :

$$\boxed{(\forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^tXAX = 0) \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_2}$$

I.B.3) La question précédente montre que si $A_1 = 0$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^tXA_1X = {}^tXA_2X = 0$ et $\Phi(A_1) = \Phi(A_1)$: plan d'équation cartésienne $z = 0$. Donc :

$$\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective.}}$$

I.B.4) $\Phi(A)=\Phi(A') \Leftrightarrow (\forall X\in\mathbb{R}^2,\ {}^tXAX={}^tXA'X)$.
$\Leftrightarrow (\forall X\in\mathbb{R}^2,\ {}^tX(A-A')X=0)$
$\Leftrightarrow A-A'\in\mathcal{A}_2$
$\Leftrightarrow A'=p(A)$ (où p est le projecteur de E de base $\mathcal{S}_2$ et de direction $\mathcal{A}_2$)
D'où :

$$\boxed{\forall A\in E,\ \exists! A'\in\mathcal{S}_2 \text{ telle que } \Phi(A)=\Phi(A');\ A'=\frac{A+{}^tA}{2}}$$

I.C.1) $\forall A,\ B\in E,\ <A,B>=au+bv+cw+dt$ en posant :
$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} u & v\\ w & t\end{pmatrix}$.
On reconnaît le produit scalaire associé à la base canonique de E. Donc :

$$\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

I.C.2) $\forall (A,B)\in\mathcal{S}_2\times\mathcal{A}_2,\ <A,B>=tr({}^tAB)=tr(AB)$ (puisque $A\in\mathcal{S}_2$).
D'autre part, $<A,B>\ = tr({}^t({}^tAB))$ (la trace d'une matrice est égale à celle de sa transposée)
$= tr({}^tBA)$
$= -tr(BA)$ $(B\in\mathcal{A}_2)$
$= -tr(AB)$ (car $tr(AB)=tr(BA)$)
Donc : $\mathcal{S}_2\perp\mathcal{A}_2$ et comme ces sous-espaces sont supplémentaires, $\mathcal{A}_2=\mathcal{S}_2^{\perp}$. Donc :

$$\boxed{p \text{ est le projecteur orthogonal de base } \mathcal{S}_2 \text{ pour le produit scalaire } <,>}.$$

I.C.3) Une telle base de E est obtenue en juxtaposant une base orthonormée de $\mathcal{S}_2$ et une base orthonormée de $\mathcal{A}_2$:

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Dans cette base, la matrice de } p \text{ est } \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}$$

I.C.4)a)

$$\boxed{p(A)=\frac{A+{}^tA}{2}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}$$

I.C.4)b) Les valeurs propres de $p(A)$ sont 2 et 0 et les sous-espaces-propres associés sont :
$E_2=Vect\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\}$ et $E_0=Vect\left\{\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\}$
D'où :

$$\boxed{p(A)=PDP^{-1} \text{ avec } P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\in\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ et } D=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

I.C.4)c) Dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ où $\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{J} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}$,

$\Phi(A)$ a pour équation réduite : $Z = 2X^2$, c'est un cylindre parabolique de génératrices dirigées par $\overrightarrow{J}$

I.D - A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont λ et μ. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{k})$, $\Phi(A)$ admet pour équation cartésienne $\boxed{Z = \lambda X^2 + \mu Y^2}$. L'on a 3 cas :

✓ si $\det(A) > 0$, λ et μ sont non nulles et de même signe : $\Phi(A)$ est un paraboloïde elliptique.

✓ si $\det(A) = 0$, par exemple, $\lambda \neq 0$ ($A \neq 0$) et $\mu = 0$: $\Phi(A)$ est un cylindre parabolique dont les génératrices sont dirigées par $\overrightarrow{J}$.

✓ si $\det(A) < 0$, λ et μ sont non nulles et de signe contraire : $\Phi(A)$ est un paraboloïde hyperbolique.

I.E.1) C'est une question de cours :

✓ si $\det(A) = 1$, l'endomorphisme est une rotation vectorielle.

✓ si $\det(A) = -1$, l'endomorphisme est une réflexion (symétrie orthogonale de base une droite vectorielle).

I.E.2) Si $\det A < 0$, A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique χ_A vaut $X^2 - 1$.

Ses valeurs propres sont 1 et -1 et il existe $P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ avec $\overrightarrow{I} = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{J} = -\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}$, $\Phi(A)$ a pour équation cartésienne $Z = X^2 - Y^2$.

C'est un paraboloïde hyperbolique qui se déduit du paraboloïde d'équation $z = x^2 - y^2$ par la rotation d'axe (Oz) et d'angle $\frac{\theta}{2}$

I.E.3) Si $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det A > 0$, $\exists\theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On a $\Phi(A) = \Phi(p(A)) = \Phi\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Dans le repère $\mathcal{R}$, $\Phi(A)$ a pour équation cartésienne $z = \cos\theta(x^2 + y^2)$. Donc :

✓ si $\theta = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, $\Phi(A)$ est le plan d'équation cartésienne $z = 0$.

✓ si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, $\Phi(A)$ est un paraboloïde elliptique.

I.E.4) $B \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$; donc B admet les valeurs propres 1 et -1. ses sous-espaces propres sont :

$E_1 : -3x + \sqrt{3}y = 0$; d'où $E_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right\}$ et

$E_{-1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$ (orthogonal à E_1).

D'où $B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$\boxed{\Phi(B) \text{ est transformé de } \Phi(A) \text{ par la rotation d'axe } (Oz) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}}$$

I.F.1) A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont λ et μ. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{k})$, $\Phi_1(A)$ admet pour équation cartésienne $\boxed{\lambda X^2 + \mu Y^2 - Z^2 = 0}$. L'on a 5 cas :

- ✓ si $\det(A) > 0$ et $tr(A) > 0$,
  λ et μ sont non nulles et de même signe positif, puisque $\lambda + \mu = tr(A) > 0$: $\Phi_1(A)$ est donc un cône de sommet O.
- ✓ si $\det(A) > 0$ et $tr(A) < 0$,
  λ et μ sont non nulles et de même signe négatif, puisque $\lambda + \mu = tr(A) < 0$: $\Phi_1(A) = \{O\}$.
- ✓ si $\det(A) = 0$ et $tr(A) > 0$,
  par exemple, $\lambda > 0$ et $\mu = 0$: $\Phi_1(A)$ a pour équation réduite : $\lambda X^2 - Z^2 = 0$:
  $\Phi_1(A)$ est la réunion des deux plans sécants selon (OY), d'équations cartésiennes respectives $\sqrt{\lambda}X + Z = 0$ et $\sqrt{\lambda}X - Z = 0$.
- ✓ si $\det(A) = 0$ et $tr(A) < 0$,
  par exemple, $\lambda < 0$ et $\mu = 0$: $\Phi_1(A)$ a pour équation réduite : $\lambda X^2 - Z^2 = 0 \Leftrightarrow X = Z = 0$: $\Phi_1(A) = (OY)$.
- ✓ si $\det(A) < 0$,
  λ et μ sont non nulles et de signes contraires : $\Phi_1(A)$ est donc un cône de sommet O.

I.F.2) Procédure MAPLE :

```
> phi:=proc(A) local nature,B;
  B:=(A+transpose(A))/2;
  if det(B)>0 then
      if trace(B)>0 then nature:=`cône de sommet O`
      else nature:=`{O}`
      fi
  else
      if det(B)=0 then
          if trace(B)>0 then nature:=`réunion de 2 plans sécants`
          else `droite`
          fi
      else nature:=`cône de sommet O`
      fi
  fi;
 end;
```

I.F.3) D'après la question I.C.4), dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ où $\overrightarrow{I} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{J} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}$, $\Phi_1(A)$ a pour équation réduite :

$$\boxed{2X^2 - Z^2 = 0}$$

et

$$\boxed{\begin{array}{l}\Phi_1(A) \text{ est la réunion des deux plans sécants d'équations cartésiennes respectives} \\ \sqrt{2}X - Z = 0 \text{ et } \sqrt{2}X + Z = 0 \text{ sécants en } (OY) : x = -y,\ z = 0\end{array}}$$

Partie II - Application à une famille de surfaces

II.A -

$$\boxed{\begin{array}{l}\Gamma_{\lambda,\theta} \text{ est la projection orthogonale de l'intersection de } \Sigma_\theta \text{ et du plan d'équation cartésienne} \\ z = \lambda, \text{ sur le plan } (xOy).\end{array}}$$

II.B -

$$\boxed{\Sigma_\theta = \Phi(A_\theta) \text{ avec } A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

II.C.1) Le polynôme caractéristique de A_θ vaut :
$\chi_{A_\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + \cos 2\theta = (X - \cos\theta - \sin\theta)(X - \cos\theta + \sin\theta)$. Donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_\theta \text{ sont } \lambda_1 = \cos\theta + \sin\theta \text{ et } \lambda_2 = \cos\theta - \sin\theta}$$

Les sous-espaces propres respectifs sont :
$E_{\lambda_1} : -\sin(\theta)x + \sin(\theta)y = 0$. D'où :

$$E_{\lambda_1} = \begin{cases} Vect\left\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\} & \text{si } \theta \neq 0\ [\pi] \\ \mathbb{R}^2 \text{ si } \theta = 0\ [\pi] \end{cases} \quad \text{et } E_{\lambda_2} = \begin{cases} Vect\left\{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\} & \text{si } \theta \neq 0\ [\pi] \\ \mathbb{R}^2 \text{ si } \theta = 0\ [\pi] \end{cases}$$

Dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Une base orthonormale diagonalisant } A_\theta \text{ est } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right)}.$$

II.C.2) $\mathcal{C}$ a pour paramétrisation $\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) \\ y(\theta) = \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) \end{cases}$.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } \sqrt{2}}$$

II.C.3)

$$\boxed{\det(A_\theta) = \cos 2\theta \text{ et } tr(A_\theta) = 2\cos\theta}$$

II.D.1) cos et sin étant $2\pi-$périodiques,

$$\boxed{\Sigma_{\theta+2\pi}=\Sigma_\theta}$$

II.D.2) $\Sigma_{\theta+\pi}$ admet pour équation cartésienne $z=-\cos\theta(x^2+y^2)-2\sin\theta xy$. Donc :

$$\boxed{\Sigma_{\theta+\pi}\text{ est symétrique de }\Sigma_\theta\text{ par la symétrie orthogonale de base }(xOy)}$$

II.D.3) $\Sigma_{-\theta}$ admet pour équation cartésienne $z=\cos\theta(x^2+y^2)-2\sin\theta xy \Leftrightarrow$
$z=\cos\theta((-x)^2+y^2)+2\sin\theta(-x)y$. Donc :
$M(x,y,z)\in\Sigma_{-\theta}\Leftrightarrow M'(-x,y,z)\in\Sigma_\theta$ et :

$$\boxed{\Sigma_{-\theta}\text{ est symétrique de }\Sigma_\theta\text{ par la symétrie orthogonale de base }(yOz)}$$

II.E.1) Dans $\mathcal{R}'=(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ avec : $\overrightarrow{I}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{J}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{K}=\overrightarrow{k}$,
Σ_θ a pour équation cartésienne $Z=(\cos\theta+\sin\theta)X^2+(\cos\theta-\sin\theta)Y^2\Leftrightarrow$
$Z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)X^2+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)Y^2\right)$. Donc :

a) Si $0\le\theta<\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)>0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)>0$. D'où :

$$\boxed{\Sigma_\theta\text{ est un paraboloïde elliptique.}}$$

b) Si $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=1$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=0$. D'où :

$$\boxed{\Sigma_\theta\text{ est le cylindre parabolique d'équation cartésienne }Z=X^2.}$$

c) Si $\dfrac{\pi}{4}<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)>0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)<0$. D'où :

$$\boxed{\Sigma_\theta\text{ est un paraboloïde hyperbolique.}}$$

II.E.2) Dans $\mathcal{R}''=(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ avec : $\overrightarrow{I}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{J}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$,
$\Gamma_{\lambda,\theta}$ a pour équation cartésienne $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)X^2+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)Y^2=\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}$. Donc :

a) Si $0\le\theta<\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)>0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)>0$.
D'où la nature de $\Gamma_{\lambda,\theta}$ est donnée par le tableau suivant :

$\lambda>0$	$\lambda=0$	$\lambda<0$
Ellipse d'axes (OX) et (OY)	$\{O\}$	$\emptyset$

b) Si $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=1$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=0$.
D'où la nature de $\Gamma_{\lambda,\theta}$ est donnée par le tableau suivant :

$\lambda>0$	$\lambda=0$	$\lambda<0$
réunion de deux droites parallèles à (OY)	(OY)	$\emptyset$

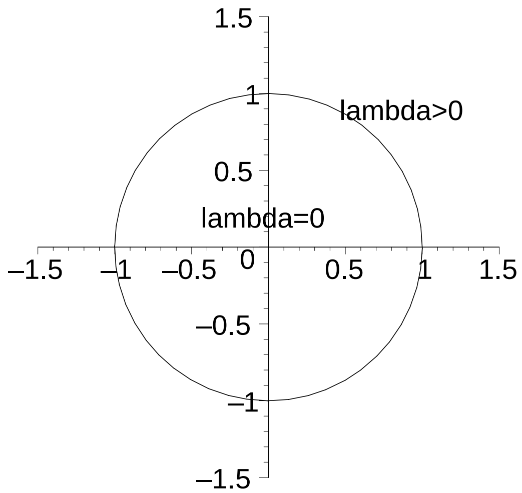
c) Si $\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) > 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) < 0$.
D'où la nature de $\Gamma_{\lambda,\theta}$ est donnée par le tableau suivant :

$\lambda > 0$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0$
hyperbole d'axe transverse (OX)	2 droites sécantes en O	hyperbole d'axe transverse (OY)

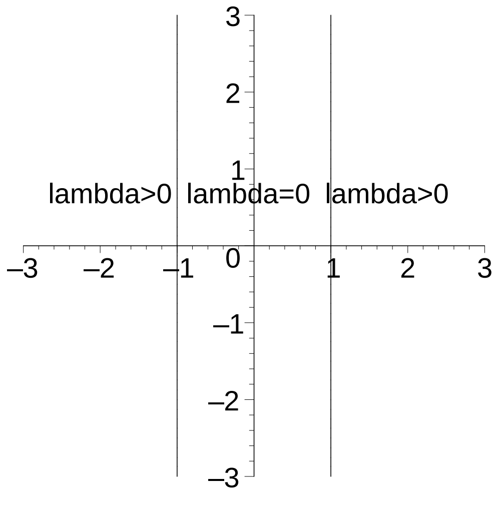
II.E.3) Dans $\mathcal{R}''$, $\Gamma_{\lambda,\theta}$ a pour équation cartésienne $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) X^2 + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) Y^2 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}$, ce qui donne respectivement pour $\theta = 0$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $X^2 + Y^2 = \lambda$, $X^2 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}$ et $X^2 - Y^2 = \lambda$.

D'où les représentations de $\Gamma_{\lambda,\theta}$ pour :

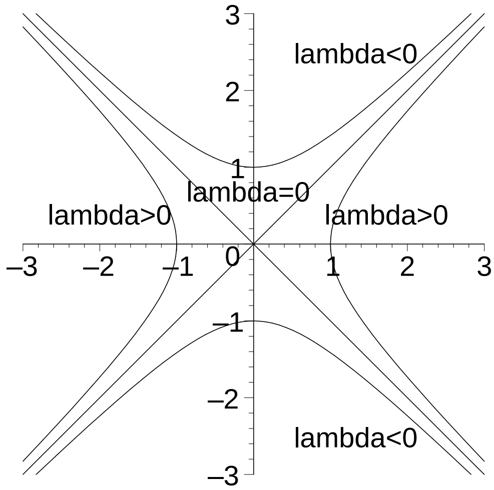
a) $\theta = 0$.



b) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.



c) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.



Partie III - Application de Φ_1

III.A - C_0 a pour équation cartésienne $z^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - x^2 = 0$. On reconnaît l'équation d'un cône de révolution d'axe (Ox).

III.B - On a vu que la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est diagonalisable et qu'il existe $P = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ avec $\overrightarrow{I} = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{J} = -\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}$), C_θ a pour équation cartésienne $Z^2 = X^2 - Y^2$. Donc :

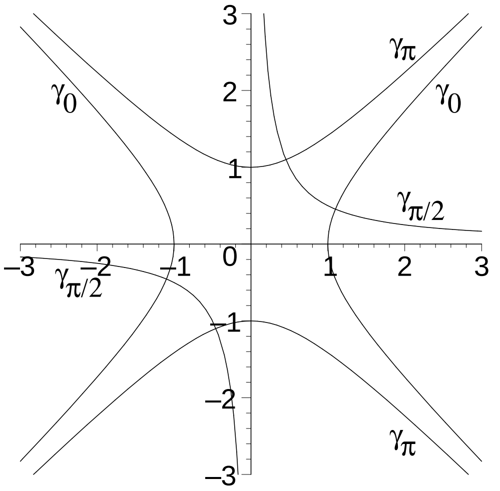
$$\boxed{C_\theta \text{ est un cône de révolution d'axe } (OX)}$$

III.C -

$$\boxed{\begin{array}{l} C_\theta \text{ se déduit de } C_0 \\ \text{par la rotation d'axe } (Oz) \text{ et d'angle } \dfrac{\theta}{2} \end{array}}$$

III.D - γ_θ admet pour équation cartésienne $\begin{cases} z = -1 \\ \cos\theta(x^2 - y^2) - 2\sin\theta xy = -1 \end{cases}$

Dans le repère $(\Omega(0,0,-1), \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ avec $\overrightarrow{I} = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{J} = -\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$, γ_θ admet pour équation cartésienne $X^2 - Y^2 = 1$. C'est une hyperbole équilatère obtenue à partir de γ_0 par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\theta}{2}$. D'où les représentations :



Partie IV - Une autre application

IV.A.1) S_0 a pour équation cartésienne $z^2 = 2xy$; donc :

$$\boxed{S_0 = \Phi_1(A) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

IV.A.2) $\det A > 0$ et $tr(A) > 0$; d'après I.F.1),

$$\boxed{S_0 \text{ est un cône de sommet } O}$$

IV.A.3) L'équation réduite de $S_0 = C_{\pi/2}$ est $\boxed{Y^2 + Z^2 = X^2}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ avec $\overrightarrow{I} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{J} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}$. Donc :

$$\boxed{S_0 \text{ est un cône de révolution de sommet } O \text{ et d'axe d'équation } \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}}$$

IV.B.1) Dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la rotation vectorielle d'axe $Vect\left\{\overrightarrow{j}\right\}$ et d'angle a, a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, elle a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$. D'où :

$$\boxed{\text{La matrice de la rotation d'axe } (Oy) \text{ et d'angle } a \text{ est } A = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}}$$

IV.B.2) L'expression analytique de la rotation précédente est $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a)X - \sin(a)Z \\ Y \\ \sin(a)X + \cos(a)Z \end{pmatrix}$. D'où, si l'on note r la rotation d'axe (Oy) et d'angle a, $r(S_0)$ a pour équation :

$(\sin(a)X+\cos(a)Z)^2 = 2(\cos(a)X-\sin(a)Z)Y \Leftrightarrow$
$\sin^2 a\ X^2+\cos^2 a\ Z^2+2\cos a\sin a\ XZ-2\cos a\ XY+2\sin a\ YZ=0.$
On reconnaît l'équation de S_{-a}. Donc :

$$\boxed{S_a \text{ est l'image de } S_0 \text{ par la rotation d'axe } (Oy) \text{ et d'angle } -a}$$

IV.B.3)

$$\boxed{S_a \text{ est donc un cône de révolution de sommet } O \text{ d'axe dirigé par } \cos a\,\overrightarrow{i}+\sin a\,\overrightarrow{k}}$$

IV.C.1) P_λ admet pour équation cartésienne $\left\{\begin{array}{l} y=\lambda \\ z^2=2\lambda x\end{array}\right.$ Comme $\lambda\neq 0$,

$$\boxed{\begin{array}{l}P_\lambda \text{ est une parabole du plan d'équation } y=\lambda,\ \text{de sommet } \Omega(0,\lambda,0),\ \text{d'axe} \\ (\Omega x) \text{ et de foyer } F_\lambda\left(\dfrac{\lambda}{2},\lambda,0\right).\end{array}}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } L \text{ est alors } D\setminus\{O\} \text{ où } D \text{ a pour équation cartésienne } \left\{\begin{array}{l} 2x=y \\ z=0\end{array}\right.}$$

IV.C.2) S_0 étant un cône de révolution d'axe $\Delta\left\{\begin{array}{l} x=y \\ z=0\end{array}\right.$, l'ensemble F est l'ensemble obtenu par révolution de $D\setminus\{O\}$ autour de Δ : cône de révolution privé de son sommet.

Soit $\mathcal{R}'$ le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ de la question IV.A.3). Les formules de changement de repère sont :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

D'où D a pour équation dans $\mathcal{R}'$ $\left\{\begin{array}{l}\sqrt2(X-Y)=\dfrac{\sqrt2}{2}(X+Y)\\ Z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X-3Y=0\\ Z=0\end{array}\right.$

$F\cup\{O\}$ a donc pour équation dans $\mathcal{R}'$:
$X=3\varepsilon\sqrt{Y^2+Z^2}$ (avec $\varepsilon=\pm1$) $\Leftrightarrow X^2=9(Y^2+Z^2)$,
et dans $\mathcal{R}$:
$\dfrac{(x+y)^2}{2}=9\dfrac{(-x+y)^2}{2}+9z^2\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+9z^2-10xy=0$. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}F \text{ est l'ensemble d'équation cartésienne } 4x^2+4y^2+9z^2-10xy=0 \text{ dans } \mathcal{R},\ \text{privé de } O.\\ \text{C'est un cône de révolution d'axe } \Delta \text{ privé de son sommet.}\end{array}}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr