I Etude d'intégrales généralisées

I.A Divergence de I_α pour $\alpha \leqslant 2$

Notons que la fonction f_α est toujours continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc localement intégrable, de plus elle est positive, on ne le rappelera plus nécessairement.

I.A.1) Pour $\alpha < 0$, $f_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, il n'y a donc pas de problème de convergence en 0.

Par ailleurs : $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} x$, et enfin : $f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. On peut par exemple utiliser le critère d'équivalence en $+\infty$, la fonction étant positive.

I.A.2) Désormais, on a $\alpha \geqslant 0$, et donc le seul problème de convergence est en $+\infty$. On ne rappelera pas toujours.

Pour $\alpha = 0$, $x^\alpha = 1$, et : $f_\alpha(x) = \dfrac{x}{1+\sin^2 x} \geqslant \dfrac{x}{2}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. On peut par exemple utiliser le critère de comparaison.

I.A.3) On a : $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$ et donc : $1 \leqslant 1 + x^\alpha \sin^2 x \leqslant 1 + x^\alpha$.

Ce qui donne : $f_\alpha(x) = \dfrac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x} \geqslant \dfrac{x}{1+x^\alpha} \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$.

Or : $\dfrac{x}{1+x^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x$ diverge pour $\alpha \leqslant 2$.

Ce qui fait que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ diverge par comparaison.

I.B Convergence de I_α

I.B.1) f_α est positive, dons ses primitives sont croissantes, ce qui entraîne $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{x} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.

C'est à dire si et seulement si la suite $\displaystyle\int_0^{u_n} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée, (u_n) étant une suite de limite infinie.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ est bornée, puisque c'est une série positive.

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(n+\frac12)\pi} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{(n+\frac12)\pi} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$.

Les deux suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ et $\left(\displaystyle\int_0^{(n+\frac12)\pi} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x\right)$ sont donc bornées en même temps, ce qui nous permet de conclure :

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge}$$

I.B.2) Pour $x \in \left[(n-\frac12)\pi, (n+\frac12)\pi\right]$, on a :

$$\frac{(n-\frac12)\pi}{1+\left((n+\frac12)\pi\right)^\alpha \sin^2 x} \leqslant \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x} \leqslant \frac{(n+\frac12)\pi}{1+\left((n-\frac12)\pi\right)^\alpha \sin^2 x}.$$

Ce qui donne bien : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

I.B.3) $w_n = (n+\frac{1}{2})\pi \displaystyle\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{1+\left((n-\frac{1}{2})\pi\right)^\alpha \sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

On pose le changement de variable $u = x - n\pi$ qui donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ et $\sin^2 u = \sin^2 x$, on trouve : $w_n = (n+\frac{1}{2})\pi \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left((n-\frac{1}{2})\pi\right)^\alpha \sin^2 u}\,\mathrm{d}u.$

Mais la fonction de u est paire, ce qui donne finalement :

$$w_n = 2(n+\tfrac{1}{2})\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left((n-\frac{1}{2})\pi\right)^\alpha \sin^2 u}\,\mathrm{d}u.$$

En faisant le même changement de variable et en utilisant la même symétrie, on obtient aussi facilement :

$$v_n = 2(n-\tfrac{1}{2})\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)^\alpha \sin^2 u}\,\mathrm{d}u.$$

I.B.4) Dans $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+h^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, on fait le changement de variable $u = \tan x$ par application de la règle de Bioche. D'où : $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$ et $\sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2}$.

On obtient une intégrale généralisée, nécessairement convergente car on a effectué un changement de variable monotone de classe C_1 sur une intégrale simple.

Finalement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+h^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+h^2)u^2}\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{1+h^2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+h^2}}.$$

Ce qui nous donne en remplaçant h par sa valeur :

$$v_n = (2n-1)\pi\frac{\pi}{2\sqrt{1+\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)^\alpha}} \text{ et : } w_n = (2n+1)\pi\frac{\pi}{2\sqrt{1+\left((n-\frac{1}{2})\pi\right)^\alpha}}.$$

I.B.5) $v_n = \dfrac{\pi^2(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{1+(n+\frac{1}{2})^\alpha\pi^\alpha}}$, et $(n+\frac{1}{2})^\alpha\pi^\alpha \geqslant 1$, ce qui donne :

$$v_n \geqslant \frac{\pi^2(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}}}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

$$v_n \geqslant \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \geqslant \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

car $n \geqslant 1$.

On a donc $K = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ qui convient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$.

$$w_n = \frac{\pi^2(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{1+(n-\frac{1}{2})^\alpha\pi^\alpha}} \leqslant \frac{\pi^2(n+\frac{1}{2})}{(n-\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}(n+\frac{1}{2})}{(n-\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}}}(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{1}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

$$w_n \leqslant \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{n+\frac{1}{2}}{n-1} \times \left(\frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{5}{2} \times 1 \text{ toujours pour } n \geqslant 2.$$

On a donc $K' = \dfrac{5}{2}$ qui convient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$.

I.B.6)
- Pour $\alpha > 4$, $\sum K'\dfrac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ converge car $\dfrac{\alpha}{2}-1 > 1$,

  d'où $\sum w_n$ converge et aussi $\sum u_n$ par comparaison de séries positives.
- Pour $\alpha \leqslant 4$, $\sum K\dfrac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ diverge car $\dfrac{\alpha}{2}-1 \leqslant 1$,

  d'où $\sum v_n$ diverge et aussi $\sum u_n$ par comparaison de séries positives.

On obtient : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 4$

et enfin : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 4$.

I.C Limites de Φ

I.C.1) Comme les intégrales convergent, on a bien : $4 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow f_{\alpha_1}(x) \geqslant f_{\alpha_2}(x) \Rightarrow \Phi(\alpha_1) \geqslant \Phi(\alpha_2)$.
Φ est donc bien décroissante.

I.C.2) On utilise : $v_n \geqslant K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$,

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \geqslant K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \geqslant K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \int_1^{n+1} \frac{1}{(t+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}\,\mathrm{d}t$ par comparaison classique de séries et d'intégrales.

Finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \geqslant K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\frac{\alpha}{2}-2}\left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-2}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-2}}\right)$.

La série converge et en passant à la limite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k \geqslant K\frac{(2\pi)^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}$.

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(n+\frac{1}{2})\pi} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$.

Mais, l'intégrale et la série convergent, d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(\alpha)$.

On obtient enfin : $\Phi(\alpha) \geqslant K\dfrac{(2\pi)^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2} \underset{\alpha\to 4^+}{\longrightarrow} +\infty$.

On a donc montré : $\displaystyle\lim_{\alpha\to 4^+} \Phi(\alpha) = +\infty$.

I.C.3) $w_n \leqslant K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{1}{(n-1]^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ pour $n \geqslant 2$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k \leqslant K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \leqslant K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_2^{n} \frac{1}{(t-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}\,\mathrm{d}t + 1\right)$ par comparaison classique d'une série et d'une intégrale, décalée ici d'un rang.

On intègre : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k \leqslant K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\frac{\alpha}{2}-2}\left(2 - \frac{1}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-2}}\right)$.

La série converge, on passe à la limite : $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} w_k \leqslant 2K'\frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}$.

Mais : $2K'\dfrac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2} \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, en utilisant les croissances comparées.

Par ailleurs, en sortant le premier rang de la relation du I.C.2, on a :

$\displaystyle 0 \leqslant \Phi(\alpha) \leqslant u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} w_k \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x + 2K'\frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}$.

Il suffit maintenant de regarder la limite de :

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$.

$$0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\frac{3\pi}{2}}{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3\pi}{2}}{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant 3\pi\frac{\pi}{2\sqrt{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha}}.$$

Mais : $3\pi\dfrac{\pi}{2\sqrt{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha}} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cette deuxième limite, associée à la première entraîne : $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} \Phi(\alpha) = 0$.

II Etude d'une série de fonctions

II.A C'est une série positive à termes non nuls. Le critère de d'Alembert est utilisable.

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)^x}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \times \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

La série $\sum \dfrac{n^x}{n!}$ converge toujours.

II.B La série est positive, donc : $S(x) \geqslant u_1(x)$ et donc $S(x) \geqslant 1$.

S est donc à valeurs strictement positives.

Pour $n \geqslant 2$, $x_1 < x_2 \Rightarrow n^{x_1} < n^{x_2} \Rightarrow S_n(x_1) < S_n(x_2) \Rightarrow S(x_1) \leqslant S(x_2)$

Mais par ailleurs, toujours pour $n \geqslant 2$:

$$S_n(x_2) - S_n(x_1) \geqslant S_2(x_2) - S_2(x_1) = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2} > 0 \Rightarrow S(x_2) - S(x_1) \geqslant \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2} > 0.$$

S est donc strictement croissante.

II.C Pour ces calculs on utisera le développement de e^x en 1, c'est à dire : $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1,$$

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} = \mathrm{e},$$

$$S(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2\mathrm{e},$$ car les 2 séries convergent,

$$S(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3(2\mathrm{e}) - 2\mathrm{e} = 5\mathrm{e},$$ car les 3 séries convergent.

II.D On a déjà montreé que $S(x) > 0$.

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^x}{k!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^x}{k!} + \frac{n^x}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^x}{k!} = S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^x}{k!}$$

$$= S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!}\left(1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^x \frac{n!}{k!}\right)$$

mais $x < 0$ et $k > n$, donc : $\left(\dfrac{k}{n}\right)^x \leqslant 1$,

et aussi : $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{\underbrace{(n+1)(n+2)\cdots k}_{(k-n)\text{ facteurs}}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$

Notons la notation inhabituelle avec $k > n$.

On a donc maintenant :

$$S(x) \leqslant S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!}\left(1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}}\right) = S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!}\left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}\right),$$

car on retrouve une série géométrique.

Ce qui donne bien : $S(x) \leqslant S_{n-1}(x) + \dfrac{n^x}{n!}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

II.E On a la double inégalité : $S_{n-1}(x) \leqslant S(x) \leqslant S_{n-1}(x) + \dfrac{n^x}{n!}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

$S_{n-1}(x)$ est une valeur approchée à ε près de $S(x)$ dès que : $\dfrac{n^x}{n!}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \varepsilon$.

$S_{n-1}(-1)$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $S(-1)$ dès que : $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\cdot n!} \leqslant 10^{-2}$.

Pour $n=5$, $\dfrac{6}{5^2\cdot 5!} = \dfrac{1}{5^3\cdot 4} < 10^{-2}$.

Et donc $S_4(-1)$ convient.

II.F Pour $x \geqslant k$, on a : $u_k(x) \geqslant 1$, et donc pour $x \geqslant n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \geqslant n$ et enfin : $S(x) \geqslant n$, ce qui prouve que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

Pour $x<0$, on a : $S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_1(x) + \dfrac{2^x}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, $\dfrac{3}{4}\,2^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, et $S_1(x) = u_1(x) = 1$.

Ce qui donne : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} S(x) = 1$.

II.G La seule chose qui reste à étudier, compte tenu des questions précédentes est la branche infinie en $+\infty$.

Remarquons que : $\dfrac{S(x)}{x} \geqslant \dfrac{u_n(x)}{x}$ pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$, en majorant la somme par un seul terme.

On prend maintenant $n = \mathrm{E}(x)$, la partie entière de x, et donc : $\dfrac{S(x)}{x} \geqslant \dfrac{u_n(n)}{n+1}$ car la fonction u_n est croissante.

Ce qui donne : $\dfrac{S(x)}{x} \geqslant \dfrac{n^n}{n!(n+1)} = \dfrac{n^n}{(n+1)!} = a_n$.

Etudions la suite a_n par le théorème de d'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{n^n} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}\ .$$

Ceci prouve que : $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc que : $\dfrac{S(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a une branche parabolique de direction Oy.

L'autre branche infinie est une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $-\infty$.

On peut tracer le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$S(x)$	1	$\nearrow$	$(\mathrm{e}-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

II.H Dans les conditions annoncées, $x \in [0,1]$, et : $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=p}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Mais, comme $x \in [0,1]$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^p}{p!} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{p!}{k!}$, toutes ces séries étant convergentes.

De plus : $\dfrac{p!}{k!} \leqslant \dfrac{1}{(k-p)!}$, en effet, les coefficient binomiaux sont plus grands que 1.

On majore encore : $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^p}{p!} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{(k-p)!} = \frac{x^p}{p!}\mathrm{e}$.

On obtient bien l'encadrement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{e}\frac{x^p}{p!}$.

II.I La fonction est continue donc localement intégrable sur $]0,1]$, le problème de convergence est en 0. Mais $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\mathrm{e}^t-1}{t} = 1$, la fonction est prolongeable par continuité, c'est un faux problème, l'intégrale converge.

II.J On encadre maintenant $\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}$.

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}-1}{t}\leqslant\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\leqslant\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}-1}{t}+\mathrm{e}\frac{x^p}{p!}\text{ pour }p\geqslant 1.$$

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{t^{k-1}}{k!}\leqslant\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}\frac{t^{k-1}}{k!}+\mathrm{e}\frac{x^p}{p!}\text{ pour }p\geqslant 2.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1 en utilisant : $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t=\frac{1}{k\cdot k!}$ et en utilisant également la linéarité de l'intégrale.

On obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k\cdot k!}\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k\cdot k!}+\frac{\mathrm{e}}{p\cdot p!}$.

Regardons les limites des différents termes : $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k\cdot k!}=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k\cdot k!}=S(-1)$.

Et aussi : $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{p\cdot p!}=0$.

En appliquant le théorème d'encadrement : $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\mathrm{d}t=S(-1)$.