# Exercice 1

**1.** a) La limite de $f$ en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré, c'est-à-dire $+\infty$.

b) $f$ est un polynôme, donc dérivable sur tout intervalle, en particulier $[0,+\infty[$. Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$, négative sur $[0,2]$, positive sur $[2,+\infty[$.

On en déduit facilement :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2.** a) $f$ est continue, strictement monotone sur $[0,2]$ et change strictement de signe, elle s'annule donc exactement une fois sur $]0,2[$.
$f$ est continue, strictement monotone sur $[2,+\infty[$ et change strictement de signe, elle s'annule donc exactement une fois sur $]2,+\infty[$.

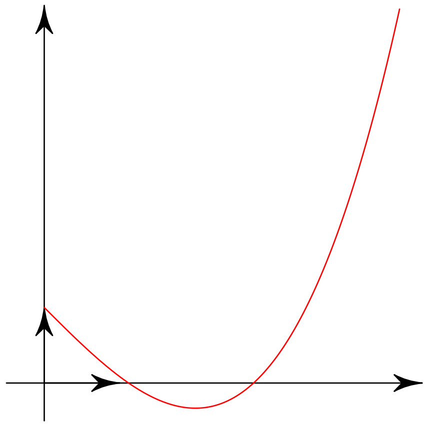
b) On a $f(\beta) = 0$, donc $1 + \dfrac{\beta^3}{12} = \beta$.

c) On a $f(1) > 0$ et $f(1,2) < 0$, donc, $\beta \in ]1\,;\,1,2[$.
On a aussi $f(2,7) < 0$ et $f(2,8) > 0$, donc, $\gamma \in ]2,7\,;\,2,8[$.

d) On en déduit facilement :

| $x$ | $0$ | | $\beta$ | | $\gamma$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3.**



**4.** a) On pose $g(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3}$, remarquons que $g(\beta) = \beta$ car $f(\beta) = 0$.
$g$ est continue croissante sur $[0,\beta]$, donc l'image de cet intervalle est $[g(0), g(\beta)] = [0,\beta]$.
On a donc $u_n \in [0,\beta] \Rightarrow u_{n+1} \in [0,\beta]$.
Comme $u_0 = 1 \in [0,\beta]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\beta]$.

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geqslant 0$, donc la suite $(u_n)$ est croissante.

c) Enfin, la suite $(u_n)$ est croissante majorée, donc convergente.
Donc on a, quand $n \to +\infty$, $u_{n+1} - u_n \to 0$, or, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = f(u_n) \to 0$.
Comme $u_n \in [0,\beta]$, on obtient $u_n \to \beta$.

d) On écrit la procédure en Maple, la valeur initiale de u est $u_0$.
On calcule ensuite $u_1, u_2, \ldots, u_N$ au moyen d'une boucle for.

```
suite:=proc(N)
local u,i;
u:=1;
for i from 1 to N do
   u:=u^3/12+1
end do;
u
end proc;
```

## Exercice 2

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

   Ce qui donne : $x^2 f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x^2-1}{x} - \dfrac{2x^2+1}{x} = 0$

   $f$ est bien solution de $(E)$ sur chaque intervalle où elle est de classe $\mathscr{C}^2$, c'est à dire $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2. **a**) Sur l'ouvert de convergence, la somme d'une série entière est dérivable terme à terme, et la série dérivée a le même rayon de convergence.

   On a donc, pour $x \in ]-R, R[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$, et, $f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$.

   **b**) On écrit que $f$ ainsi défini est solution de $(E)$ sur $]-R, R[$.

   $0 = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^n - (2x^2-1) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^n - (2x^2+1) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

   $= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^n - (2x^2-1) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^n - (2x^2+1) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n-1)(n+1) a_n x^n - 2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^{n+2}$

   On réindexe le dernier terme en posant $n' = n+2$, puis en supprimant le *prime*, on obtient :

   $0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n-1)(n+1) a_n x^n - 2 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-2} x^n$

   On sépare les deux premiers termes de la première série, le second est d'ailleurs déjà nul :

   $-a_0 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (n-1)\big((n+1)a_n - 2a_{n-2}\big) x^n = 0$

   Le développement en série entière de la fonction nulle est unique,

   ce qui donne : $a_0 = 0$ et, $\forall n \geqslant 2,\ a_n = \dfrac{2}{n+1} a_{n-2}$.

   **c**) La dernière relation appliquée avec $n = 2$ en utilisant $a_0 = 0$ donne $a_2 = 0$, de la même façon, avec $n = 4$, on obtient $a_4 = 0$.

   Par une récurrence très élémentaire, $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0$.

   **d**) Si on pose $n = 2p+1$, la relation de récurrence devient : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \dfrac{2}{2p+2} a_{2p-1} = \dfrac{1}{p+1} a_{2p-1}$.

   Notons d'abord que la formule donnée est valable pour $p = 0$ !

   Ensuite il suffit de montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence :

   $a_{2p-1} - \dfrac{1}{p+1} a_{2p-1} = \dfrac{a_1}{(p+1)!} - \dfrac{1}{p+1} \cdot \dfrac{a_1}{(p)!} = 0$

3. On applique le théorème de d'Alembert avec $x_0 > 0$ pour avoir une série à termes strictement positifs :

   $u_p = \dfrac{x_0^{2p+1}}{(p+1)!}$.

   $\dfrac{u_{p+1}}{u_p} = \dfrac{\frac{x_0^{2p+3}}{(p+2)!}}{\frac{x_0^{2p+1}}{(p+1)!}} = \dfrac{x_0^2}{p+2} \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a donc $R = +\infty$.

4. $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ avec $R = +\infty$.

   $\exp(x^2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$ avec bien sûr encore $R = +\infty$.

5. $g(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$, avec $g(0) = 0$ puisqu'il n'y a pas de terme constant.

   $x\, g(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p+2}}{(p+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$, en ré-indexant avec $n = p+1$.

   Donc : $x\, g(x) = \exp(x^2) - 1$, ce qui donne : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{\exp(x^2)-1}{x}$

6. L'intervalle $]0, +\infty[$ est tel que les coefficients de l'équation différentielle linéaire du second ordre sont définis et continus, celui de $y''$ ne s'annulant pas. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sans second membre y est donc un espace vectoriel de dimension 2.

On a deux solutions clairement non proportionnelles (voir la limite en 0) qui sont les restrictions de $f$ et de $g$ sur cet intervalle, notées encore $f$ et $g$.
Ainsi, sur $]0,+\infty[$ : $\mathscr{S} = \text{Vect}(f, g)$.

7. Le procédé est le même sur $]-\infty, 0[$, avec le même résultat.
Sur $]-\infty, 0[$, $h(x) = \lambda_- f(x) + \mu_- g(x)$, et sur $]0, -\infty[$, $h(x) = \lambda_+ f(x) + \mu_+ g(x)$
Les limites à gauche et à droite en 0 doivent exister et être égales, donc $\lambda_- = \lambda_+ = 0$.
Les limites à gauche et à droite en 0 des dérivées doivent exister et être égales, donc, compte tenu des $\lambda$ nuls, $\frac{\mu_-}{2} = \frac{\mu_+}{2}$.
Nécessairement : $h(x) = \mu g(x)$ qui est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{R}$, on a $\mathscr{S} = \text{Vect}(g)$.

# Problème

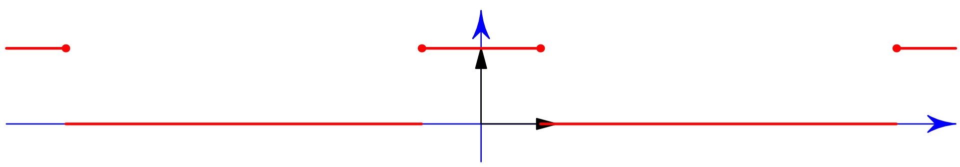
## Partie A

1. Ce sont trois séries de Riemann, on sait que $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.
Donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge car $a = 1$ ; $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge car $a = \frac{3}{2}$ ; et enfin $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $a = 2$.

2. On a : $0 \leqslant \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc, par comparaison de séries positives, $\sum \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ converge.

## Partie B

1.



2. $f$ est paire, donc les coefficients de Fourier impairs, les « $b_n(f)$ » sont nuls pour $n \in \mathbb{N}^*$.
$a_0(f)$ est la valeur moyenne de $f$, ici mesurée sur $[0, \pi]$ par parité, clairement : $a_0(f) = \frac{\alpha}{\pi}$.
Les autres coefficients pairs, les « $a_n(f)$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$, se calculent aussi sur $[0, \pi]$ par parité.
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\alpha} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(n\alpha)}{n}.$$

3. $f$ est T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc : $a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f^2(t)\,dt$
Ce qui donne ici : $\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} dt = \frac{\alpha}{\pi}$
Ou encore : $\alpha^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \alpha\pi$ ; et enfin : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$

4. On choisit $\alpha = 1 \in ]0, \pi[$, et on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$

## Partie C

1. $h$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, 1]$, on a donc une singularité en $0^+$.
$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$, on a donc une limite finie en un point fini, l'intégrale converge en 0 et enfin, converge.

2. $x \to \frac{1}{x^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$, on a donc une singularité en $+\infty$.
Cette application est une fonction de Riemann : $x \to \frac{1}{x^n}$, avec $n = 2 > 1$, son intégrale converge donc en $+\infty$.

3. Pour dériver $h$, on la considère comme un produit, donc, pour $x \in ]0,+\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{x^2} - \dfrac{2\sin^2 x}{x^3}$.

4. $x\sqrt{x}\,h'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{\sqrt{x}} - \dfrac{2\sin^2 x}{x\sqrt{x}}$.
On majore en valeur absolue en majorant, toujours en valeur absolue les « sinus » et « cosinus » par 1, on obtient : $\left|x\sqrt{x}\,h'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$.
Maintenant, on majore en valeur absolue en majorant, toujours en valeur absolue le « cosinus » par 1 et le « sinus » par son arc, on obtient : $\left|x\sqrt{x}\,h'(x)\right| \leqslant 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$.

5. Pour $x \geqslant 1$, on utilise la première majoration : $\left|x\sqrt{x}\,h'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}} \leqslant 2+2 = 4$.
Pour $x \in ]0,1[$, on utilise la seconde majoration : $\left|x\sqrt{x}\,h'(x)\right| \leqslant 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \leqslant 2+2 = 4$.
Finalement, pour $x \in ]0,+\infty[$, on a bien : $|h'(x)| \leqslant \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$, ce qui est le résultat demandé.

6. On applique $N-1$ fois la relation de Chasles, $\displaystyle\int_\alpha^{(N+1)\alpha} h(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} h(x)\,dx$.
On fait maintenant $N$ changements de variables, $x = n\alpha + t$,
on obtient : $\displaystyle\int_\alpha^{(N+1)\alpha} h(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\alpha} h(n\alpha+t)\,dt$, ce qui est la formule demandée.
On remarque maintenant que $\displaystyle\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha^2}\,dt = \int_0^\alpha h(n\alpha)\,dt$,
ce qui donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha h(n\alpha+t)\,dt - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha h(n\alpha+t)\,dt - \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha h(n\alpha)\,dt = \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha h(n\alpha+t) - h(n\alpha)\,dt$

7. $h$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, pour $b \geqslant a > 0$, $|h(b)-h(a)| \leqslant \displaystyle\sup_{u\in[a,b]} \left|h'(u)\right|(b-a) \leqslant \frac{4}{a\sqrt{a}}(b-a) = \frac{4}{a^{3/2}}(b-a)$.
On applique ceci avec $t \geqslant 0$, $a = n\alpha$ et $b = n\alpha + t$, on obtient : $|h(n\alpha+t) - h(n\alpha)| \leqslant \dfrac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}$

8. On obtient facilement, en utilisant la majoration précédente :
$$\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha |h(n\alpha+t)-h(n\alpha)| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{2\alpha^2}{(n\alpha)^{3/2}} = 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{3/2}}$$

9. On repart du résultat de la question **6**,
$$\left|\int_\alpha^{(N+1)\alpha} h(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha h(n\alpha+t)\,dt - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha h(n\alpha+t)-h(n\alpha)\,dt\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha |h(n\alpha+t)-h(n\alpha)|\,dt \leqslant 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{3/2}}.$$
On a donc montré que : $\displaystyle\left|\int_\alpha^{(N+1)\alpha} h(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}\right| \leqslant 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{3/2}}$.
Quand $N \to +\infty$, on a : $\displaystyle\int_\alpha^{(N+1)\alpha} h(x)\,dx \to \int_\alpha^{(+\infty} h(x)\,dx$, dont on a vu qu'elle existait bien.
Par ailleurs, on a montré dans la partie précédente, à la question **3**, en divisant par $\alpha$ :
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \frac{\pi-\alpha}{2}.$$
Enfin, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{3/2}} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, puisque la série converge !
On fait donc tendre $N$ vers $+\infty$, on a ainsi : $\displaystyle\left|\int_\alpha^{+\infty} h(x)\,dx - \frac{\pi-\alpha}{2}\right| \leqslant 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.
On fait tendre enfin $\alpha$ vers $0^+$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$,
car l'intégrale converge en 0 et le majorant a une limite nulle !