Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I, série TSI, concours CCP 2007

Partie 1 : Quelques résultats préliminaires

1.1) φ et ψ sont C^∞ sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \in [1,+\infty[$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$$

$$\psi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-1}{(x+2)(x+1)^2} < 0.$$

$\boxed{\varphi \text{ est donc croissante et } \psi \text{ décroissante sur } [1,+\infty[}$.

En outre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$.

D'où les tableaux de variations :

x	1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$1/4$	$+$	
$\varphi(x)$	$1/2 - \ln 2$	$\nearrow$	0

et

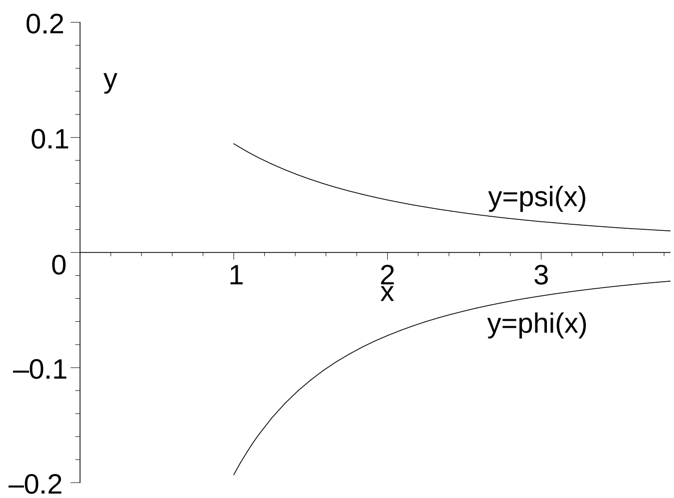
x	1		$+\infty$
$\psi'(x)$	$-1/12$	$-$	
$\psi(x)$	$1/2 - \ln 3/2$	$\searrow$	0

.

On obtient :

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi(x) < 0 \text{ et } \psi(x) > 0}$$

1.2) On obtient ainsi les représentations graphiques :



2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \varphi(n) < 0$ et (u_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \psi(n) > 0$ et (v_n) est croissante.

Enfin $u_n - v_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

3.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est une fonction rationnelle continue sur $]0,1]$. En 0, $f(x) = \dfrac{1-(1-nx+o(x))}{x} = n + o(1)$ et f se prolonge par continuité en 0. D'où :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1]}.$$

$$
\begin{aligned}
3.2)\quad f(X) &= \frac{1-\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k X^k}{X} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}X^k}{X} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}X^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}X^{k}
\end{aligned}
$$

et :

$$\boxed{f(X)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}X^k}$$

3.3) La famille $(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^{n-1})$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'autre part, $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ et la famille comprend n polynômes :

$\underline{(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^{n-1}) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

$$
\begin{aligned}
\text{On a aussi}\quad f(X) &= \frac{X\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-X)^k}{X} \quad \text{car } a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(1-X)^k
\end{aligned}
$$

et :

$$\boxed{f(X)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(X-1)^k}$$

3.4) D'après la question précédente,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p+1}\int_0^1 x^p dx \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p+1}\frac{1}{p+1} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}\binom{n}{p}}{p}
\end{aligned}
$$

et de même :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\int_0^1 (x-1)^p dx \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\frac{(-1)^{p+2}}{p+1} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}\binom{n}{p}}{p}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}$$

Partie 2 : Transformée de Laplace

4) $\displaystyle\int_x^a \ln(t)\ dt = [t\ln(t) - t] = a\ln(a) - a - x\ln(x) + x$ qui tend vers $a\ln(a) - a$ quand x tend vers 0.

On en déduit que $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln$ (continue sur $]0, a]$ et de signe constant sur $]0, 1]$) est intégrable sur $]0, a]$.

En outre, l'on sait que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) < x$ et donc, pour $A = 1,\ \beta = 1$ et $n = 1$, $\forall x \in [A, +\infty[,\ 0 \leq \ln(x) < \beta x^n$.

Donc $\underline{\ln \in E.}$

5) Soient f et $g \in E$ et λ et $\mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f + \mu g \in C(]0, +\infty[, \mathbb{C})$, $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur tout $]0, a],\ a > 0$, et s'il existe $A,\ B > 0,\ \beta,\ \gamma > 0,\ m,\ n \in \mathbb{N}$ tels que :

$\forall x \in [A, +\infty[,\ |f(x)| \leq \beta x^n$

$\forall x \in [B, +\infty[,\ |g(x)| \leq \gamma x^m$,

et par exemple $n \leq m$, $\exists C > 0$ tel que si $x > C$, $|\lambda|\beta x^{n-m} \leq |\lambda|\beta$. D'où pour $x > \max(A, B, C) = D$

$$\begin{aligned}
|(\lambda f + \mu g)(x)| &\leq |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \\
&\leq |\lambda|\beta x^n + |\mu|\gamma x^m \\
&\leq (|\lambda|\beta x^{n-m} + |\mu|\gamma)x^m \\
&\leq (|\lambda|\beta + |\mu|\gamma)x^m
\end{aligned}$$

Donc $\lambda f + \mu g \in E$. Comme $E \neq \emptyset$,

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel, sous-espace de } C(]0, +\infty[, \mathbb{C})}$$

6) Tout d'abord, φ_x est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

D'autre part, $\exists A > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}$ tels que pour $x > A,\ |f(x)| \leq \beta x^n$. D'où pour $t > A,\ |\varphi_x(t)| \leq \beta t^n e^{-xt}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi_x(t) = 0$, ce qui permet d'affirmer que φ_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Enfin $|\varphi_x| \leq |f|$ ce qui permet d'affimer que φ_x est intégrable sur $]0, 1]$.

Donc,

$$\boxed{\varphi_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

7) $\underline{\mathcal{L} \text{ est linéaire car l'intégrale est linéaire.}}$

8) f est continue sur $\mathbb{R}^+$; donc f est intégrable sur tout $]0, a],\ (a > 0)$.

Il existe $A > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall u \geq A,\ |f'(u)| \leq \beta u^n$

D'où, pour tout $t \geq A$,

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= |f(A) + \int_A^t f'(u)\ du| \\
&\leq |f(A)| + \int_A^t |f'(u)|\ du| \\
&\leq |f(A)| + \int_A^t \beta u^n\ du| \\
&\leq |f(A)| + \beta\frac{t^{n+1} - A^{n+1}}{n+1} \\
&\leq |f(A)| + \beta\frac{t^{n+1} + A^{n+1}}{n+1} \\
&\leq K + \gamma t^{n+1} \text{ (avec } K = |f(A)| + \frac{A^{n+1}}{n+1} \text{ et } \gamma = \frac{\beta}{n+1})
\end{aligned}$$

Or $\exists B > 0,\ t \geq B \Rightarrow Kt^{-n-1} \leq 1$.

Pour $t \geq \max(A, B),\ |f(t)| \leq (\gamma+1)t^{n+1}$ et $f \in E$: $\mathcal{L}$ a un sens.

Soient $u,\ v > 0$. Alors :

$\displaystyle\int_u^v f(t)e^{-xt}dt = \left[-f(t)\frac{e^{-xt}}{x}\right]_u^v + \int_u^v f'(t)\frac{e^{-xt}}{x}dt$ par intégration par parties. En faisant tendre u vers 0 et v vers $+\infty$, on obtient :

$\displaystyle\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \frac{f(0)}{x} + \frac{\mathcal{L}(f')(x)}{x}$ et

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$$

9) Soit $k \in \mathbb{N}$;

- $f_k \in C(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$
- f_k se prolonge par continuité sur tout $[0, a],\ a > 0$. Ce qui montre que f_k est intégrable sur tout $]0, a],\ a > 0$.
- D'autre part, pour $A = 1,\ \beta = 1,\ n = k$ et $t \geq A,\ |f_k(t)| = t^k \leq \beta t^n$.

$$\boxed{\text{Donc } f_k \in E}$$

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \int_0^\alpha t^{k+1}e^{-xt}dt \\
&= \left[-\frac{t^{k+1}e^{-xt}}{x}\right]_0^\alpha + \frac{1}{x}\int_0^\alpha (k+1)t^k e^{-xt}\ dt \text{ (par intégration par parties)} \\
&= -\frac{\alpha^{k+1}e^{-x\alpha}}{x} + \frac{k+1}{x}I_k
\end{aligned}$$

et en faisant tendre α vers $+\infty$, l'on obtient $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f_{k+1})(x) = \dfrac{k+1}{x}\mathcal{L}(f_k)(x)$, ce qui montre par récurrence simple :

$\forall x > 0,$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_k)(x) &= \frac{k}{x}\mathcal{L}(f_{k-1})(x) \\
&= \frac{k!}{x^k}\mathcal{L}(f_0)(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or}\quad \mathcal{L}(f_0)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(f_k)(x) = \frac{k!}{x^{k+1}}}$$

10.1) $f_\omega \in E$ car elle se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et elle est de module 1.

10.2) Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_\omega)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{i\omega t}e^{-xt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(i\omega - x)}dt \\
&= \left[\frac{e^{t(i\omega-x)}}{i\omega - x}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{x - i\omega}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(f_\omega)(x)=\frac{1}{x-i\omega}=\frac{x+i\omega}{x^2+\omega^2}}$$

10.3) En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(\cos_\omega)(x)=\frac{x}{x^2+\omega^2}\text{ et }\mathcal{L}(\sin_\omega)(x)=\frac{\omega}{x^2+\omega^2}}$$

Partie 3 : Transformée de Laplace de la fonction de Bessel

11) Soit g l'application de $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui à (t,θ) associe $\cos(t\cos\theta)$.
g est évidemment C^∞ sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]=U$.

En outre, $\forall(t,\theta)\in U,\ \begin{cases}|g(t,\theta)|\leq 1\\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,\theta\right|=|-\cos\theta\sin(t\cos\theta)|\leq 1\\ \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,\theta\right|=|-\cos^2\theta\cos(t\cos\theta)|\leq 1\end{cases}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi d\theta$ converge.

Cela permet d'affirmer que $\underline{J\text{ est de classe }C^2\text{ sur }\mathbb{R}}$ et que :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}J'(t)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos\theta\sin(t\cos\theta)\ d\theta\\ J''(t)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos^2\theta\cos(t\cos\theta)\ d\theta\end{cases}}$$

12) Intégrons par parties l'intégrale qui donne J'.

$$\forall t\in\mathbb{R},\ J'(t)=-\frac{1}{\pi}\left([\sin\theta\ \sin(t\cos\theta)]_0^\pi+\int_0^\pi t\sin^2\theta\ \cos(t\cos\theta)\ d\theta\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{J'(t)=-\frac{t}{\pi}\int_0^\pi\sin^2\theta\ \cos(t\cos\theta)\ d\theta}$$

13) $\forall t\in\mathbb{R},\ tJ''(t)+J'(t)+tJ(t)=\dfrac{t}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos(t\ \cos\theta)(-\cos^2\theta-\sin^2\theta+1)\ d\theta=0$. D'où :

$$\boxed{J\text{ est solution de l'équation différentielle }(E):tJ''+J'+tJ=0}$$

14) J est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur tout $]0,a]$ où $a>0$.

D'autre part, $\forall t\in[1,+\infty[,\quad \begin{aligned}|J(t)|&\leq\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\cos(t\cos\theta)|\ d\theta\\&\leq\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ d\theta\\&\leq 1t^0\end{aligned}$

D'où $\boxed{J\in E}$.

15.1) $\theta\to\dfrac{1}{x^2+\cos^2\theta}$ est π-périodique et paire. D'où :

$$\boxed{I(x)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{x^2+\cos^2\theta}\ d\theta=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x^2+\cos^2\theta}\ d\theta}$$

15.2) Dans l'intégrale proposée, posons $\theta=\arctan u$. Cela est possible car arctan est un difféomorphisme de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\cos^2\theta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{x^2+\dfrac{1}{1+u^2}}\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2x^2+1+x^2}\\
&= \frac{1}{1+x^2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\dfrac{ux}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{xdu}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(\dfrac{ux}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\left[\arctan\left(\frac{ux}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}
.
$$

D'où :

$$
\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\cos^2\theta} = \frac{\pi}{2x\sqrt{1+x^2}} \text{ et } I(x) = \frac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}}}
$$

16) La transformée de Laplace de J s'exprime, pour $x>0$ par :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(J)(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\ \cos\theta)d\theta\right)e^{-xt}dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\cos(t\ \cos\theta)e^{-xt}\right)d\theta
\end{aligned}
$$

Or, en posant $a=\cos\theta$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\cos(at)e^{-xt}dt &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{t(ia-x)}+e^{-t(ia+x)}}{2}\,dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(ia-x)}}{ia-x}-\frac{e^{-t(ia+x)}}{ia+x}\right]_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-ia}-\frac{1}{x+ia}\right)\\
&= \frac{x}{x^2+a^2}\\
&= \frac{x}{x^2+\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(J)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{x^2+\cos^2\theta}d\theta\\
&= \frac{x}{\pi}\times\frac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}} \text{ (d'après 15.2)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
.
$$

On a montré :

$$
\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(J)(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}
$$

Partie 4 : Transformée de Laplace de la fonction logarithme

17) g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En 0, $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}\,g(t)=0$ (la puissance "l'emportant" sur le logarithme) et g est intégrable sur $]0,1]$.

En 0, $\lim_{t\to+\infty} t^2\ g(t)=0$ (l'exponentielle "l'emportant" sur le logarithme et la puissance) et g est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'où g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

18.1) ln est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall t>0,\ \ln''(t)=-\dfrac{1}{t^2}$: ln est concave et sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes, en particulier au point d'abscisse 1. D'où :

$$\boxed{\forall u\in]-1,+\infty[,\ \ln(1+u)\leq u}$$

L'on en déduit que si $x\in]0,n[,\ -\dfrac{x}{n}\in]0,1[$ et $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\leq-\dfrac{x}{n}\Rightarrow$
$\exp\left(\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\right)\leq\exp\left(-\dfrac{x}{n}\right)\Rightarrow$
$\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\leq e^{-x}$ ($n>0,\ u\to u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

(Erreur d'énoncé : pour $x\in]0,n[$, il faut prendre $U_n(x)=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\ln(x)$.)

D'où, pour $x\in]0,n[,\ 0\leq|U_n(x)|\leq e^{-x}|\ln(x)|$

Pour $x\in[n,+\infty[,\ 0=|U_n(x)|\leq e^{-x}|\ln(x)|$.

On a montré :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq|U_n(x)|\leq e^{-x}|\ln(x)|}$$

18.2) x étant fixé, à partir d'un certain rang n ($E(x)+1$), l'on a $x<n$ et

$$\begin{aligned}U_n(x)&=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ln(x)\\&=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)\ln(x)\end{aligned}$$

Or $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{x}{n}$. D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n(x)=e^{-x}\ln(x)}$$

19.1) $h:\ \begin{array}{l}]0,n]\to\mathbb{R}\\ t\to\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\ln(t)\end{array}$ est continue sur $]0,n]$.

En outre $h(t)\underset{t\to0}{\sim}\ln(t)$ et ln est intégrable sur $]0,n]$ et de signe constant sur $]0,1]$.

Donc h est intégrable sur $]0,n]$ et J_n existe.

19.2)
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 u^p\ \ln(nu)\ du&=\left[\frac{u^{p+1}\ln(nu)}{p+1}\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{u^{p+1}}{u(p+1)}\ du\quad.\\&=\frac{\ln(n)}{p+1}-\frac{\varepsilon^{p+1}\ln(n\varepsilon)}{p+1}-\int_\varepsilon^1\frac{u^p}{p+1}\ du\\&=\frac{\ln(n)}{p+1}-\frac{\varepsilon^{p+1}\ln(n\varepsilon)}{p+1}-\frac{1-\varepsilon^{p+1}}{(p+1)^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_\varepsilon^1 u^p\ \ln(nu)\ du=\frac{\ln(n)}{p+1}-\frac{\varepsilon^{p+1}\ln(n\varepsilon)}{p+1}-\frac{1-\varepsilon^{p+1}}{(p+1)^2}}$$

En faisant tendre ε vers 0, le second membre tend vers $\dfrac{\ln(n)}{p+1}-\dfrac{1}{(p+1)^2}$ ce qui montre que :

$$\boxed{\int_0^1 u^p\ \ln(nu)\ du\text{ converge et vaut }\frac{\ln(n)}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}}$$

19.3) $\displaystyle \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{1}{p+1}\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}$

On a montré :

$$\boxed{\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}}$$

19.4)
$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(t)\ dt \\
&= n\int_0^1 (1-u)^n \ln(nu)\ ds \text{ (changement de variable valide } t = nu) \\
&= n\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}(-1)^p \int_0^1 u^p \ln(nu)\ du \\
&= n\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}(-1)^p \left(\frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \text{ (d'après 19.2)} \\
&= n\ln(n)\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}\frac{(-1)^p}{p+1} + n\sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2}\binom{n}{p} \\
&= \frac{n\ln(n)}{n+1}\sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p+1}(-1)^p + \frac{n}{n+1}\sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{p+1}}{p+1}\binom{n+1}{p+1} \text{ (d'après 19.3)} \\
&= \frac{n\ln(n)}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p}(-1)^{p-1} + \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^p}{p}\binom{n+1}{p} \text{ (translation d'indice)} \\
&= \frac{n\ln(n)}{n+1}\left(\underbrace{-\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}(-1)^p}_{(1-1)^{n+1}=0} + 1\right) + \frac{n}{n+1}\left(-\sum_{p=1}^{n+1}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\binom{n+1}{p}\right) \\
&= \frac{n\ln(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} \text{ (d'après 3.4)} \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\left(-u_n - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{J_n = \frac{n}{n+1}\left(-u_n - \frac{1}{n+1}\right)}$$

20) On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$.

Or
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)\ dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} U_n(x)\ dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n} U_n(x)\ dx \ (U_n(x) = 0 \text{ pour } x > n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} J_n \\
&= -\gamma
\end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)\ dx = -\gamma}$$

21) On a montré dans la question 4 que $\ln \in E$: sa transformée de Laplace est donc définie.
On a alors pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\ln)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)\ dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(\frac{u}{x})\ \frac{du}{x}\ (t \to u = xt \text{ est un difféomorphisme de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}) \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)\ du - \frac{\ln(x)}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\ du \\
&= \frac{-\gamma - \ln(x)}{x}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{L}(\ln)(x) = \frac{-\gamma - \ln(x)}{x}}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr