Corrigé PT 2019, épreuve C.

Préambule.

1. La fonction arctan est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, la fonction inverse de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{*+}$, donc, par composition, la fonction $x \mapsto \arctan(1/x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{*+}$, et donc, par sommation de fonctions de classe C^∞, il en est de même de h. Sa dérivée vaut, sur $\mathbf{R}^{*+}$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0,$$

et on en déduit que h est constante sur l'intervalle $\mathbf{R}^{*+}$. Or, $\arctan(1) = \pi/4$, donc $h(1) = \pi/4+\pi/4 = \pi/2$ donc la valeur à laquelle h est constante sur $\mathbf{R}^{*+}$ est $\pi/2$:

$$\forall x \in \mathbf{R}^{*+}, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Par la formule de doublement, sur $\mathbf{R}$ (et donc en particulier sur $[0, \pi/2]$) :

$$\cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1.$$

On remarque que $1/(1+\tan^2(t/2))$ est bien défini car tan est défini sur $[0, \pi/2[$, donc $\tan(t/2)$ est défini sur $[0, \pi[$, donc *a fortiori* sur $[0, \pi/2[$; et le dénominateur $1 + \tan^2(t/2)$ est supérieur ou égal à 1 donc ne s'annule pas. On calcule ensuite, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos^2(t/2)$:

$$\frac{1}{1+\tan^2(t/2)} = \frac{\cos^2(t/2)}{\cos^2(t/2)+\sin^2(t/2)} = \cos^2(t/2).$$

En utilisant successivement les relations obtenues, on déduit :

$$\cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(t/2)} - 1 = \frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Partie I.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $x \mapsto e^{-x}\sin^n(x)$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ (et même $\mathbf{R}$). Procédons à une étude asymptotique au voisinage de $+\infty$: puisque sin est bornée sur $\mathbf{R}$, il en est de même de $\sin^n(x)$, et donc $e^{-x}\sin^n(x) = O_{x\to+\infty}(e^{-x})$. Or, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, donc il en est de même par comparaison de la fonction $x \mapsto e^{-x}\sin^n(x)$.
La continuité sur $\mathbf{R}^+$ et l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de $+\infty$ assurent la convergence de l'intégrale I_n.

On calcule I_0, en utilisant $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = 1.$$

On utilise la notation $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ pour désigner l'expression d'une primitive de la fonction continue f. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int^x e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t &= \int^x e^{-t}\mathcal{R}e\,(e^{it})\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{R}e\,\left(\int^x e^{(i-1)t}\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathcal{R}e\,\left(\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right) \\
&= \mathcal{R}e\,\left(\frac{(i+1)}{-2}e^{-x}(\cos(x)+i\sin(x))\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos(x)-\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x}\cos(x)$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)-\sin(x))$.

On intègre par parties l'intégrale définissant I_n (pour , $n \geq 2$) en intégrant le facteur exponentiel, et en dérivant le facteur $x \mapsto \sin^n(x)$. Ces fonctions étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^+$, le produit $-e^{-x}\sin^n(x)$ tendant vers 0 en $+\infty$ (produit d'un facteur qui tend vers 0 et d'un facteur borné), et l'intégrale I_n étant convergente, on en déduit l'égalité suivante, la convergence du nouveau terme intégral étant assurée par l'intégration par parties :

$$I_n = \left[-e^{-x}\sin^n(x)\right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} n\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x} n\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

On procède alors à une nouvelle intégration par parties, en intégrant cette fois le facteur $x \mapsto e^{-x}\cos(x)$ et en dérivant le facteur $\sin^{n-1}(x)$, et avec des justifications analogues à celles du cas précédent :

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-ne^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_{x=0}^{x\to+\infty} + n\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) \times (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\int_0^{+\infty}\cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \frac{n(n-1)}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

par linéarité des intégrales convergentes pour la dernière égalité (la convergence du membre de gauche est déjà connue, et celle du deuxième terme dans le membre de droite provient simplement de ce qu'on reconnaît l'expression de I_n après la première intégration par parties). Cette égalité se réécrit ainsi $I_n + \frac{n-1}{2}I_n = \frac{n(n-1)}{2}\int_0^{+\infty}\cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x$. Or, en utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie et la linéarité des intégrales convergentes, l'intégrale du membre de droite devient :

$$\int_0^{+\infty}\cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}(1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\sin^n(x)\mathrm{d}x = I_{n-2}-I_n.$$

On a donc $I_n + \frac{n-1}{2}I_n = \frac{n(n-1)}{2}I_{n-2} - \frac{n(n-1)}{2}I_n$, soit encore :

$$\frac{n(n-1)}{2}I_{n-2} = \left(1+\frac{n-1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)I_n = \frac{n^2+1}{2}I_n,$$

et donc :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}.$$

On démontre alors facilement par récurrence pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_{2n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k\times(2k-1)}{(2k)^2+1}\times I_0 = \frac{\prod_{k=1}^n(2k)(2k-1)}{\prod_{k=1}^n(4k^2+1)}.$$

Le numérateur est un produit de $2n$ entiers allant de 1 à $2n$, et tous distincts : c'est $(2n)!$. Ainsi :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n(4k^2+1)}.$$

2. Simplifions l'expression de u_n :

$$u_n = \ln\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} = \ln\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{4n^2}} = \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right).$$

On exploite alors le développement limité $\ln(1+h) = h + o_{h\to 0}(h)$, et on obtient :

$$u_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, on a l'équivalence asymptotique $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$. Le membre de droite étant de signe négatif, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs négatives à partir d'un certain rang (en fait, son expression initiale permet de voir qu'elle est à valeurs négatives : il s'agit du logarithme d'un quotient de réels positifs, dont le numérateur est clairement inférieur au dénominateur : le quotient est compris entre 0 et 1, et son logarithme négatif). On est alors en mesure d'utiliser le théorème de comparaison pour les séries de signe constant (à partir d'un certain rang) pour en conclure que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum_n \left(-\frac{1}{2n}\right)$, qui est divergente (série de Riemann à une constante multiplicative près).

On calcule ensuite $\sum_{k=1}^{n} u_k$ à l'aide de l'équation fonctionnelle du logarithme :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = \ln I_{2n}.$$

Puisque la série $\sum_k u_k$ est divergente, et que son terme général est de signe constant négatif (à partir d'un certain rang suffit d'ailleurs à conclure), la suite de ses sommes partielles est décroissante et tend vers $-\infty$. On a ainsi obtenu $\lim_{n\to+\infty} \ln I_{2n} = -\infty$, puis, par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$.

Partie II.

1. Par un calcul direct :

$$F(0) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\pi}{2}.$$

2. On va mettre en œuvre le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Notons pour $(t,x) \in [0,\pi/2] \times [-a,a]$, $u(t,x) = \frac{1}{1-x\cos(t)}$. La façon la plus rapide de procéder est de constater que u est de classe C^1 sur le rectangle fermé borné $[0,\pi/2] \times [-a,a]$ (en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^1 qui ne s'annule pas car pour $|x| \leq a$, $|x\cos(t)| \leq a$, donc $-x\cos(t) \geq -a$, donc $1 - x\cos(t) \geq 1 - a > 0$). Toutes les hypothèse du théorème sont alors vérifiées :

- pour tout x, continuité de la fonction partielle $t \mapsto u(t,x)$ sur le segment d'intégration, donc intégrabilité ;
- pour tout t, caractère C^1 de la fonction partielle $x \mapsto u(t,x)$;
- pour tout x, continuité de la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$;
- et caractère borné de cette dérivée partielle sur le rectangle en tant que fonction continue sur une partie fermée bornée ; or, sur un segment d'intégration, une constante est intégrable et peut être choisie pour dominante.

Variante : qui ne maîtrise pas le cours sur les fonctions de deux variables peut développer tous les arguments :

- pour tout $x \in [-a,a]$, la fonction $t \mapsto u(t,x)$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$ (en tant qu'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas comme dans le premier calcul), donc intégrable ;
- pour tout $t \in [0,\pi/2]$, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et :
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2};$$
- pour tout $x \in [-a,a]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ est continue sur $[0,\pi/2]$, en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant (toujours) pas ;
- **(hypothèse de domination)** pour $t \in [0,\pi/2]$ et $x \in [-a,a]$, $|\cos(t)| \leq 1$, et $(1-x\cos(t))^2 \geq (1-a)^2$ (même calcul qu'au premier *alinea*), et donc :
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{1}{(1-a)^2},$$
et la fonction constante $\frac{1}{(1-a)^2}$ est intégrable sur le segment $[-a,a]$.

Dans les deux cas, toutes les hypothèses sont réunies, ce qui permet de conclure au caractère C^1 de F sur $[-a,a]$, et d'obtenir l'expression :

$$\forall x \in [-a,a], F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}\mathrm{d}t.$$

3. L'intervalle ouvert $]-1,1[$ est la réunion des segments $[-a,a]$ lorsque a parcourt $]0,1[$. Puisque F est dérivable sur chacun de ces segments, elle est dérivable sur leur réunion, donc sur $]-1,1[$ (et l'expression de la dérivée est encore valable).

4. L'égalité $u = \tan(t/2)$ pour $t \in [0, \pi/2]$ est équivalente à $t = 2\arctan(u)$. L'application $u \mapsto 2\arctan(u)$ est une bijection de classe C^1 et strictement croissante de $[0,1]$ dans $[0,\pi/2]$ (comme on traite ici de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, on aurait pu se passer de la bijectivité et de la stricte monotonie). On obtient ainsi en utilisant ce changement de variable (et le préambule) :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos(t)} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1 - x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2}{1+u^2 - x(1-u^2} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2}{(1+x)u^2 + 1 - x} \mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{1-x} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right) u^2 + 1} \mathrm{d}u \qquad \text{en utilisant le changement de variable affine } v = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u \\
&= \frac{2}{1-x} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{1}{v^2+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)
\end{aligned}$$

5. En exploitant la relation précédente, puis la question 1 du préambule, sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
F(x) + F(-x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \arctan\left[\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{-1}\right]\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

6. L'équation $(\mathcal{E}_0)$ est linéaire, homogène, d'ordre 1, et régulière (le coefficient en facteur devant y' ne s'annule pas) sur $]-1,1[$, donc l'espace des solutions est une droite vectorielle, engendrée par une fonction de la forme $x \mapsto e^{-A(x)}$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{-x}{1-x^2}$. Ainsi, $A(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ convient, et, après simplification, on obtient pour expression de la solution générale :

$$y_0(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, c \in \mathbf{R}.$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher les solutions de l'équation avec second membre sous la forme $c(x)y_0(x)$ où y_0 est une solution non triviale de l'équation homogène : on prend ici $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Après substitution dans l'équation, et simplification, on se ramène à :

$$(1-x^2)c'(x)y_0(x) = 1,$$

soit $c'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et donc $c(x) = \arcsin(x)$ convient. La solution générale de l'équation $(\mathcal{E})$ sur $]-1,1[$ est donc :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(c + \arcsin(x)\right), c \in \mathbf{R}.$$

Puisque le terme en logarithme s'annule en 0 que le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ prend lui la valeur 1, on obtient immédiatement que c est la valeur en 0 de la solution générale écrite ci-dessus. Ainsi, l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy $\mathcal{P}_0$ est :

$$x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

et l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin(x)\right).$$

Il a été admis que F est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ sur $]-1,1[$. D'après la question 1, elle prend la valeur 0 en $\pi/2$. La fonction F est donc solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$. Or, ce problème de Cauchy admet une unique solution sur $]-1,1[$ (équation régulière d'ordre 1 assortie d'une condition initiale), donc F est égale à la solution précédemment obtenue, soit :

$$\forall x \in]-1,1[, F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin(x)\right).$$

7. Notons $G(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)-x}{(1-x\cos(t))^2}\mathrm{d}t$ pour $x \in]-1,1[$. On remarque que $G(x)$ est bien défini en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment (par les mêmes arguments que précédemment). On calcule alors (en utilisant notamment la linéarité de l'intégrale) :

$$\begin{aligned}
(1-x^2)G(x) &= (1-x^2)\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}\mathrm{d}t - x(1-x^2)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{(1-x\cos(t))^2}\\
&\overset{Q2-3}{=} (1-x^2)F'(x) - x(1-x^2)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{(1-x\cos(t))^2}\\
&= xF(x) + 1 - x(1-x^2)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{(1-x\cos(t))^2}\\
&= 1 + x\int_0^{\pi/2}\frac{1-x\cos(t)-(1-x^2)}{(1-x\cos(t))^2}\mathrm{d}t\\
&= 1 + x^2\int_0^{\pi/2}\frac{x-\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}\mathrm{d}t\\
&= 1 - x^2G(x),
\end{aligned}$$

dont on déduit :

$$\forall x \in]-1,1[, \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)-x}{(1-x\cos(t))^2}\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque : le calcul est (nettement) plus rapide si on part de l'égalité $(1-x^2)F'(x) - xF(x) = 1$, qu'on remplace $F(x)$ et $F'(x)$ par leurs expressions intégrales, et qu'on utilise la linéarité, le membre de gauche pouvant alors rapidement être écrit comme $G(x)$. Je laisse toutefois le calcul ci-dessus, comme exemple de ce qu'on ne trouve pas toujours d'emblée la démarche la plus efficace (qu'on soit professeur ou étudiant).

8. Pour y une solution de $(\mathcal{E}_R)$, par évaluation en $x=0$ de l'équation :

$$(1-0^2)y'(0) - 0\times y(0) = 1 \text{ donc } y'(0) = 1.$$

Or, on sait que dans un développement en série entière $\sum_n a_n x^n$ d'une fonction f, pour tout n, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. En prenant ici $n=1$, on obtient :

$$a_1 = 1.$$

Par dérivation terme à terme, sur $]-R,R[$:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ (le terme d'indice 0 étant nul),}$$

et donc, sur $]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
1=(1-x^2)y'(x)-xy(x) &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^{n+1} \\
&= a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^{n+1} \text{ par changement d'indice },
\end{aligned}$$

et donc, par unicité du développement en série entière (outre l'égalité $a_1=1$ qu'on retrouve ainsi), pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_n=0,$$

donc :

$$a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n,$$

soit encore :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*, a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n-1}.$$

On obtient alors facilement par récurrence :

$$\forall p\in\mathbf{N}, a_{2p}=\lambda\prod_{k=1}^{p}\frac{2k-1}{2k}=\lambda\frac{\prod_{k=1}^{p}(2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^{p}(2k)^2}=\lambda\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2},$$

et :

$$\forall p\in\mathbf{N}, a_{2p+1}=\prod_{k=1}^{p}\frac{2k}{2k+1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

9. Critère de d'Alembert. Soit $\sum_n a_n$ une série numérique à termes tous non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $L\in\mathbf{R}^+\cup\{+\infty\}$.

— si $L\in[0,1[$, alors la série $\sum_n a_n$ converge absolument (et donc converge) ;

— si $L>1$, alors la série $\sum_n a_n$ diverge (grossièrement).

Le cas $L=1$ échappe à ce critère.

Dans le cas $\lambda=0$, tous les coefficients a_{2n} sont nuls d'après la question 8, donc la série $\sum_n a_n x^n$ devient $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Notons alors $u_n=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ pour $x\neq 0$ réel. Les termes u_n sont alors tous non nuls, et :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}x^2=\frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}x^2\underset{n\to+\infty}{\to}x^2.$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, si $|x|>1$, alors la série $\sum_n a_n x^n$ diverge (grossièrement), et si $|x|<1$, elle converge (absolument). Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ est égal à 1.

Les calculs de la question 8, et le fait que le rayon de convergence obtenu soit non nul, montrent que la fonction $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ est solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy $\mathcal{P}_0$. Or, ce problème admet une unique solution sur $]-1,1[$ (d'après le théorème de Cauchy linéaire, déjà mis en œuvre en 6*d*)), dont on a calculé l'expression $x\mapsto\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ à la question 6*c*). Ainsi :

$$\forall x\in]-1,1[, \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Par ailleurs, la fonction $x\mapsto(\arcsin(x))^2$ admet pour dérivée $x\mapsto\frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, qui est développable en série entière sur $]-1,1[$ d'après ce qui précède. Le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière permet alors d'en déduire que la fonction $x \mapsto (\arcsin(x))^2$ est elle aussi développable en série entière sur $]-1,1[$, avec le même rayon de convergence (à savoir 1), et que son développement est :

$$\forall x \in]-1,1[, (\arcsin(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

10. Remarquons d'abord que $\mathcal{W}_n$ est définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On procède ensuite à une intégration par parties en prenant $n \geq 2$: on intègre le facteur sin, et on dérive le facteur $(\sin)^{n-1}$ (tous deux de classe C^1 sur le segment d'intégration). On obtient :

$$\mathcal{W}_n = \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t,$$

puis, après avoir remarqué que la partie toute intégrée s'annule, on utilise la relation fondamentale de la trigonométrie et la linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{W}_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t) - \sin^n(t)\mathrm{d}t = (n-1)\mathcal{W}_{n-2} - (n-1)\mathcal{W}_n,$$

et donc $n\mathcal{W}_n = (n-1)\mathcal{W}_{n-2}$, puis :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{W}_n = \frac{n-1}{n}\mathcal{W}_{n-2}.$$

C'est bien la même relation de récurrence que celle satisfaite par la suite $(a_n)_n$.

Par un calcul direct, on trouve :

$$\mathcal{W}_0 = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
$$\mathcal{W}_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_{t=0}^{t=\pi/2} = 1,$$

et on remarque la relation $a_n = \mathcal{W}_n$ pour $n \in \{0,1\}$ (pour $n=0$, du fait de l'hypothèse $\lambda = \pi/2$).

Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, et donc $0 \leq \sin^n(t)$. En multipliant les deux membres de l'inégalité $\sin t \leq 1$ par $\sin^n t$, on déduit $0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$, puis, par croissance de l'intégrale :

$$0 = \int_0^{\pi/2} 0\mathrm{d}t \leq \mathcal{W}_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t\mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t = \mathcal{W}_n.$$

La suite $(\mathcal{W}_n)_n$ est donc décroissante et à valeurs positives (et donc convergente de limite positive, ce que l'énoncé ne demande pas ici). Ceci permet d'écrire pour $p \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathcal{W}_{2p+1} \leq \mathcal{W}_{2p} \leq \mathcal{W}_{2p-1}.$$

En divisant cet encadrement par le réel strictement positif $\mathcal{W}_{2p+1}$ (la positivité est déjà établie, pour la positivité stricte, il suffit de voir qu'il s'agit de l'intégrale sur un intervalle non trivial d'une fonction continue, positive, non constamment nulle) :

$$1 \leq \frac{\mathcal{W}_{2p}}{\mathcal{W}_{2p+1}} \leq \frac{\mathcal{W}_{2p-1}}{\mathcal{W}_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p} = 1 + \frac{1}{2p}.$$

Le minorant et le majorant de cet encadrement tendent tous deux vers 1, donc, par le théorème de convergence par encadrement, il en est de même du membre central. Or $a_n = \mathcal{W}_n$ pour tout n (d'après 10*a*) et *b*) et un raisonnement par récurrence de pas 2), donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1.$$

On peut reprendre la même démarche en divisant l'encadrement de la question 10*c* par $\mathcal{W}_{2p-1}$, ce qui amène à $1 - \frac{1}{2p} \leq \frac{\mathcal{W}_{2p}}{\mathcal{W}_{2p-1}} \leq 1$, et par le même argument assure que $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$ tend vers 1 et donc, par passage à l'inverse :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = 1.$$

Notons $u_n = (n+1)a_n a_{n+1}$. Ainsi, $u_0 = a_0 a_1 = \frac{\pi}{2}$. Supposons que $u_n = \frac{\pi}{2}$ pour un certain n. Alors :

$$u_{n+1} = (n+2)a_{n+1}a_{n+2} \overset{8(b)}{=} (n+2)a_{n+1}\frac{n+1}{n+2}a_n = (n+1)a_n a_{n+1} = u_n = \frac{\pi}{2}.$$

On a bien établi par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(n+1)a_n a_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Le résultat de la question 10(d) se réinterprète en affirmant que le quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$: car la suite extraite des termes de rangs pairs, et celle des termes de rangs impairs tendent toutes deux vers cette limite (mais ce n'est pas au programme). Ainsi, $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, donc, en utilisant le résultat de la question 10e), on obtient :

$$a_n = \sqrt{a_n^2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}\sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = sqrt\frac{\pi}{2(n+1)}\sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Remarque : Si on veut vraiment interdire l'argument sur les suites des termes de rangs pairs et impairs, on peut procéder ainsi : la décroissance de la suite $(a_n)_n$ et sa positivité stricte (voir 10b), c) et d)) impliquent $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}$ d'une part ; et les calculs de la question 10d) impliquent (en distinguant selon la parité de n) :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \max\{1+\frac{1}{n}, \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\},$$

et on peut alors utiliser le théorème de convergence par encadrement.

Deux séries entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ telles que $a_n \sim b_n$ ont même rayon de convergence. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ est égal à celui de $\sum_n \sqrt{\frac{\pi}{2n}}x^n$, qui est égal à celui de $\sum_n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (les constantes multiplicatives non nulles ne changent pas le rayon de convergence). Celui-ci est compris entre celui de $\sum_n x^n$ et $\sum_n \frac{x^n}{n}$ (car $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$; or, si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_n b_n x^n$). Le rayon de convergence de $\sum_n x^n$ vaut 1, et celui de $\sum_n \frac{x^n}{n}$ aussi (car il est égal à celui de $\sum_n x^n$ car la multiplication du coefficient a_n par n ne modifie par le rayon de convergence). On a donc établi que le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ vaut 1.

On reprend le résultat de la question 10f (en substituant n par $2p$), et l'expression de a_{2p} obtenue à la question 8, et on en déduit :

$$\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}},$$

et donc par produits (le membre de gauche passe à droite et vice-versa) :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} \sim \sqrt{\pi},$$

puis, en élevant au carré (les équivalents asymptotiques sont compatibles avec les produits, donc avec les élévations au carré) :

$$\frac{1}{p}\frac{4^{2p}(p!)^4}{((2p)!)^2} \sim \pi.$$

11. Si les deux séries $\sum_n a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}$ convergent, alors, par linéarité, la série $\sum_n a_n x^n$ converge. Ceci prouve que le rayon de convergence R de $\sum_n a_n x^n$ est supérieur ou égal au minimum de ceux des séries $\sum_n a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}$.
Or, si $|x| < R$, alors la série $\sum_n a_n x^n$ converge absolument, et les séries extraites $\sum_n a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}$ convergent aussi absolument (par majorations évidentes). Ceci prouve que les rayons de convergence de $\sum_n a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}$ sont supérieurs ou égaux à R.
En définitive, R est le minimum des rayons de convergence de $\sum_n a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}$. Or, on a établi à la question 9 que le rayon de convergence de $\sum_n a_{2n+1}x^{2n+1}$ vaut 1. Et, à la question 10, pour une valeur de λ particulière, on a établi $R = 1$. Mais alors, le rayon de convergence de $\sum_n a_{2n}x^{2n}$ est supérieur ou égal à 1 pour cette valeur de λ, et donc encore pour toutes les autres valeurs de λ non nulles (la multiplication par une constante non nulle ne modifiant pas le rayon de convergence), et *a fortiori* pour $\lambda = 0$. Ainsi, en définitive, le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ est 1 quel que soit λ.