❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

A rendre avec la copie :

2 feuilles de papier millimétré.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les trois parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soit a un réel strictement positif. On considère l'application f_a , 2π – périodique, continue par morceaux, telle que, pour tout réel t de $[-\pi, +\pi[$:

$$f_a(t) = e^{a|t|}$$

L'application f_{-a} , 2π – périodique, continue par morceaux, est définie pour tout réel t de $[-\pi, +\pi[$ par :

$$f_{-a}(t) = e^{-a|t|}$$

I. Première partie

1. Pour cette question uniquement, on prend $a = 2$.
   a. Tracer le graphe de la fonction f_a sur $[-2\pi, +2\pi[$.
   b. Tracer le graphe de la fonction f_{-a} sur $[-2\pi, +2\pi[$.

(on fera deux figures distinctes)

2. Rappeler la définition des coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction T-périodique, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et continue par morceaux.

3. *a.* Calculer : $\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t)\, dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-a}(t)\, dt$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt)\, dt = \frac{1}{a}\left[(-1)^n e^{a\pi} - 1\right] - \frac{n^2}{a^2}\int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt)\, dt$$

c. Calculer, pour tout entier naturel n, les coefficients de Fourier trigonométriques de f_a.

d. Calculer, pour tout entier naturel n, les coefficients de Fourier trigonométriques de f_{-a}.

4. *a.* Rappeler la définition d'une fonction de classe C^1 par morceaux.
f_a et f_{-a} sont-elles C^1 par morceaux ?
f_a et f_{-a} sont-elles continues sur $[-\pi, +\pi[$?

b. Justifier que, pour tout réel t de $[-\pi, +\pi[$:

$$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{2\, sh(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4a}{\pi(a^2+n^2)}(-1)^n\, sh(a\pi)\cos(nt)$$

5. Que valent :

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$?

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$?

Deuxième partie

On considère l'application ψ, définie pour tout réel x par :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{ch(t)}\, dt$$

1. *a.* On considère la fonction $g : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par : $g(x,t) = \frac{\cos(xt)}{ch(t)}$.
g est-elle continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$?
Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$: $|g(x,t)| \leq \frac{2}{e^t}$.

b. ψ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (on énoncera le théorème utilisé)

2. *a.* Montrer que, pour tout réel X, et tout entier naturel strictement positif N :

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k + \frac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1+X}$$

b. En déduire que, pour tout réel t, et tout entier naturel strictement positif N :

$$\frac{1}{ch\, t} = 2e^{-t}\left[\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]$$

c. Montrer que, pour tout réel x, et tout entier naturel strictement positif N :

$$\psi(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\left[\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right] dt$$

Dans ce qui suit, on notera :

$$R_N(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\, dt$$

3. *a.* Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}\times[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par : $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}$ est bornée sur $\mathbb{R}\times[0, +\infty[$.

b. Déterminer la limite de $R_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

4. N désignant un entier naturel non nul, calculer, pour tout entier k de $[0, N]$:

$$J_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\, dt.$$

5. Montrer que, pour tout réel x, $\psi(x)$ peut s'exprimer comme la somme d'une série :

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$$

et donner, pour tout entier k, une expression de $u_k(x)$.

Troisième partie

Pour tout entier naturel non nul N, on considère la fonction S_N définie sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ par :

$$S_N(t) = \frac{\sin[(2N+1)t]}{\sin(t)} .$$

1. Pour tout réel $t\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, montrer que :

$$\sum_{k=-N}^{+N} e^{2ikt} = S_N(t) .$$

2. *a.* Montrer que la fonction S_N est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction $\widetilde{S}_N$.

b. Montrer que la fonction $\widetilde{S}_N$ est 2π – périodique.

c. Montrer que la fonction $\widetilde{S}_N$ est bornée.

3. a étant le réel introduit en début de problème, on considère l'intégrale :

$$I_{a,N} = \int_0^{+\infty} e^{-2at}\, \widetilde{S}_N(t)\, dt$$

Montrer que l'intégrale $I_{a,N}$ est convergente.

4. Montrer que :

$$I_{a,N} = \sum_{k=-N}^{+N} \int_0^{+\infty} e^{2ikt}\, e^{-2at}\, dt$$

puis que :

$$I_{a,N} = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^{+N} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku}\, e^{-au}\, du$$

5. On désigne par g_a l'application, 2π – périodique, continue par morceaux, définie par :

$$g_a(t) = f_{-a}(t) \text{ si } t \in [0, +\pi[\quad , \quad g_a(t) = e^{-a\pi} f_{-a}(t-\pi) \text{ si } t \in [+\pi, +2\pi[$$

a. Vérifier que, pour tout *t* de $t \in [0, +2\pi[$: $g_a(t) = e^{-at}$.

b. On désigne par $a_k(g_a)$ $(k \in \mathbb{N})$ et $b_k(g_a)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ les coefficients de Fourier de g_a.
Montrer que :

$$I_{a,N} = \pi \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{+N} a_k(g_a) \right\}$$

c. Que vaut $\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi}$?

6. Montrer que $I_{a,N}$ converge lorsque N tend vers $+\infty$, et déterminer sa limite, lorsque N tend vers $+\infty$.

Ce problème présente des résultats concernant des fonctions exponentielles, très utilisées en traitement du signal.