MA15

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce problème propose l'étude mathématique de quelques solutions des équations différentielles du mouvement de certains pendules et de certains systèmes masse-ressort.

PARTIE I

1. Soit k une constante réelle donnée dans le segment $[-1,1]$. Quel est, en fonction de k, le domaine de définition de la fonction χ de la variable réelle φ où

$$\chi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \ ?$$

Donner la parité éventuelle de χ et son sens de variation.

Pour k de valeur absolue strictement inférieure à 1, exprimer $\chi(\varphi+\pi)$ en fonction de $\chi(\varphi)$ et de la constante $C = \chi(\pi/2)$.

2. Pour tout n entier positif ou nul, calculer par récurrence les intégrales

$$L_n = \int_0^{\pi/2} \big(\sin v\big)^{2n} \, dv.$$

Donner un développement de la constante C en série entière de la variable k. Quel est le rayon de convergence de ce développement en série entière ?

3. Montrer que la fonction χ est injective sur son domaine de définition. On note $\phi \,:\, x \mapsto \phi(x)$ sa fonction réciproque.

Quels sont le domaine de définition de ϕ, sa parité éventuelle et son sens de variation ?

Pour k de valeur absolue strictement inférieure à 1, exprimer $\phi(x + 2\,C)$ en fonction de $\phi(x)$.

4. On définit les trois fonctions α_k, β_k et γ_k de la variable réelle x par les relations

$$\alpha_k(x) = \sin\big(\phi(x)\big), \;\; \beta_k(x) = \cos\big(\phi(x)\big), \;\; \gamma_k(x) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\big(\phi(x)\big)}.$$

Donner leurs domaines de définition et leur parité éventuelle.

Exprimer la dérivée de chacune des trois fonctions α_k, β_k et γ_k en fonction de α_k, β_k et γ_k.

5. Exprimer les fonctions α_0 et β_0 à l'aide des fonctions trigonométriques circulaires.

6. Exprimer les fonctions α_1, β_1 et γ_1 à l'aide des fonctions hyperboliques.

PARTIE II

Soit $\{O; (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})\}$ un repère orthonormé direct du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. On note Γ la courbe d'équation paramétrique de point générique $M(u)$ défini par

$$\overrightarrow{OM}(u) = \xi(u)\,\overrightarrow{\imath} + \eta(u)\,\overrightarrow{\jmath}, \text{ avec } \xi(u) = a\,(\pi + u + \sin u), \quad \eta(u) = a\,(-1 - \cos u),$$

où u décrit le segment $[-\pi, \pi]$ et où a est une constante réelle donnée strictement positive.

1. Représenter graphiquement la courbe Γ en précisant ses éventuels éléments de symétrie ainsi que sa tangente aux points $M(-\pi)$, $M(0)$ et $M(\pi)$.

2. Calculer l'abscisse curviligne $s(u)$ du point $M(u)$, lorsque s est choisie de telle façon que ce soit une fonction croissante de u s'annulant en $u = 0$. Quelle est la longueur de Γ ?

3. On désigne par $\psi(u)$ l'angle entre la tangente en $M(u)$ à Γ et l'axe $(O, \overrightarrow{\jmath})$. On suppose désormais que le paramètre u est lui-même une fonction, à valeurs dans $[-\pi, \pi]$, d'une variable réelle τ. On pose $\sigma(\tau) = s(\,u(\tau)\,)$.

On suppose que la fonction σ vérifie le problème

$$\frac{d^2\sigma(\tau)}{d\tau^2} = -g\,\cos\psi(\,u(\tau)\,), \;\; \sigma(0) = \sigma_0 \in]-4\,a, 4\,a[, \;\; \sigma'(0) = 0,$$

où g est une constante réelle strictement positive donnée.

Déterminer la fonction σ. La période de σ dépend-elle de σ_0 ?

PARTIE III

1. Pour a et b réels vérifiant $a < b$, démontrer la convergence de l'intégrale

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

En mettant le polynôme $(x-a)(b-x)$ sous la forme $A^2 - (x-B)^2$ puis en effectuant un ou plusieurs judicieux changement(s) de variable(s), calculer la valeur de cette intégrale.

2. Soit y_0 donné vérifiant $0 < y_0 < \pi$ et soit l'intégrale

$$H(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-y_0}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}.$$

Utiliser la valeur de I pour calculer la limite de $H(y_0)$ lorsque y_0 tend vers 0: on pourra utiliser $\cos y$ comme nouvelle variable.

3. Soit α un réel donné strictement positif. Etudier la convergence de l'intégrale

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^\alpha}}.$$

Quelle est la valeur de $K(2)$?

4. On désigne par f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$.

En se ramenant à un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre en Y_1 et Y_2, où l'on a posé $Y_1 = y$ et $Y_2 = y'$, donner une condition suffisante sur f pour que le problème

$$(1) \qquad y''(t) = f(\,y(t)\,),\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0$$

admette une solution maximale unique.

On admettra sans chercher à donner des conditions sur f que tout problème de cette forme rencontré dans la suite de cette épreuve admet, pour toutes constantes données y_0 et y'_0, une solution et une seule de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

5. On note F la primitive de $2f$ qui s'annule en y_0, autrement dit $F(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} 2\,f(u)\,du$.
On pose $G(\,y(t)\,) = F(\,y(t)\,) + {y'_0}^2$.

Montrer que, si y'_0 est non nul et si h est suffisamment petit pour que la dérivée y' de la solution y du problème (1) garde un signe constant sur $[t_0 - h, t_0 + h]$, cette solution est solution du problème

$$(2) \qquad {y'}^2(t) = G(\,y(t)\,),\ y(t_0) = y_0$$

où l'équation différentielle écrite est alors équivalente à une équation à variables séparables.

On admettra que, dans les cas particuliers rencontrés ci-dessous, toute solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (2) est solution de (1).

6. On suppose dans cette question que la constante y_0' n'est pas nulle et on pose $\epsilon = \dfrac{y_0'}{|y_0'|}$. Montrer qu'il existe un intervalle J contenant t_0 tel que l'unique solution y du problème (1) soit injective sur J.

Montrer que pour tout t dans J on a

$$(3) \qquad t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\epsilon}{\sqrt{G(v)}}\, dv.$$

7. Soit ω une constante réelle donnée strictement positive et soit μ une constante réelle donnée strictement supérieure à 2. Soit dans cette question y l'unique solution du problème

$$y''(t) = -\omega^2 \sin y/2(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = \mu\,\omega.$$

Montrer qu'il existe k, que l'on précisera, tel que la fonction $\sin y$ puisse être exprimée à l'aide de la fonction α_k : on pourra prendre $(t - t_0)/2$ comme nouvelle variable.

8. On suppose dans cette question 8 que $y_0' = 0$, donc que $G(y_0)$ est nul, que $\dfrac{dG}{dy}(y_0)$ est non nul, qu'il existe $y_1 > y_0$ tel que $G(y_1) = 0$ et tel que $\dfrac{dG}{dy}(y_1)$ est non nul, et enfin que $G(y)$ est strictement positif sur $]y_0, y_1[$.

a) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{G(v)}}\, dv$.

b) On note $t_1 - t_0$ la valeur de cette intégrale. Comment varie alors la solution y du problème (1) sur l'intervalle $[t_0, t_1]$?

c) Comment varie alors la solution y du problème (1) sur l'intervalle $[t_1, 2\,t_1 - t_0]$?

d) En déduire que cette solution est périodique de période $2\displaystyle\int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{G(v)}}\, dv$.

9. Soit ω une constante réelle strictement positive donnée. Dans cette question 9 on choisit $f(y) = -\omega^2 \sin y$, $y_0 \in]-\pi, 0[$ et $y_0' = 0$.

Montrer que la solution y du problème (1) est alors une fonction périodique.

Donner la valeur de sa période sous une forme intégrale.

Quelle est la limite de cette période lorsque y_0 tend vers 0 ?

10. Soit λ une constante réelle strictement positive donnée. Dans cette question 10 on choisit $f(y) = -\lambda\, y^3$, $y_0 < 0$ et $y_0' = 0$.

Montrer que la solution y du problème (1) est encore une fonction périodique.

Déterminer sa période en fonction de y_0 et de $K(\alpha)$ pour une valeur de α que l'on précisera.