X-ENS PSI 2018

On note $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est positive si :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on définit sa norme infinie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On définit également I_n la matrice identité de taille n. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Si X est une variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ son espérance, respectivement sa variance.
Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n.

On étudie ici l'équation différentielle avec conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x),\ x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

où $c \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et c **positive**.

Après avoir montré l'existence et l'iunicité d'une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ au problème (1), on s'intéressera à la construction d'une suite d'approximations de u.

Les parties 1,2 et 5 sont indépendantes. Les parties 3 et 4 nécessitent d'utiliser certains résultats établis dans les parties 1 et 2.

1 Existence et unicité des solutions de (1)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème

$$\left\{\begin{array}{l} -v_\lambda''(x) + c(x)v_\lambda(x) = f(x),\ x \in [0,1] \\ v_\lambda(0) = 0 \\ v_\lambda'(0) = \lambda \end{array}\right. \tag{1bis}$$

   admet une unique solution $v_\lambda \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, v_λ peut s'exprimer sous la forme :

$$v_\lambda = \lambda w_1 + w_2$$

   avec $w_1 \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ l'unique solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} -w_1''(x) + c(x)w_1(x) = 0,\ x \in [0,1] \\ w_1(0) = 0 \\ w_1'(0) = 1 \end{array}\right.$$

   et w_2 une fonction indépendante de λ à caractériser.
3. Montrer que $w_1(1) \neq 0$.
4. En déduire qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ du problème (1). Montrer que cette solution est unique.
5. Montrer que si f est positive, alors u est également positive.

2 Une matrice de discrétisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n, constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Soit $V = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre de A_n associé à une valeur propre complexe λ. Montrer que λ est nécessairement réelle et que les composantes v_i de V vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \; 1 \leq i \leq n$$

   où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.
7. Montrer que toute valeur propre de A_n est dans l'intervalle $]0, 4[$.
8. Soit λ une valeur propre de A_n.
   (a) Montrer que les racines complexes r_1, r_2 du polynôme

$$P(r) = r^2 - (2-\lambda)r + 1$$

   sont distinctes et conjuguées.
   (b) On pose $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.
9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_n ainsi qu'une base de vecteurs propres.
10. On considère la famille de matrices $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées M-matrices) :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \begin{cases} b_{i,i} > 0 \\ b_{i,j} \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad j \neq i \\ \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0 \end{cases}$$

   Montrer que si B est une M-matrice, alors on a
   (a) B est inversible
   (b) Si $F = {}^t(f_1, \dots, f_n)$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,
   (c) tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.
11. En appliquant les résultats précédents à $A_n + \varepsilon I_n$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que tous les coefficients de A_n^{-1} sont positifs.

3 Une suite d'approximations de la solution de (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère les réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ définis par $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

12. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$, il existe une constante $C \geq 0$, indépendante de n, telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \; |v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \leq Ch^2$$

13. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(u_i)_{0\leq i\leq n+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i)+c(x_i)u_i = f(x_i), \quad \text{pour} \;\; 1\leq i\leq n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

14. On suppose (dans cette question seulement) que $c(x)=0$ et $f(x)=1$ pour tout $x\in[0,1]$. On note u la solution exacte du problème (1). Montrer que pour tout $i\in\{0,\ldots,n+1\}$, on a

$$u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1-x_i)$$

15. Montrer que si f est positive, alors $u_i\geq 0$ pour tout $i\in\{0,\ldots,n+1\}$.

4 Un premier résultat de convergence

Dans toute cette partie, on supposera de plus que $c\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et que $f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ (c est toujours positive également).

16. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :

$$N(A) = \sup\{\|Ax\|_\infty,\ \|x\|_\infty\leq 1\}$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A=[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$, alors

$$N(A) = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

17. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
    (a) En utilisant les résultats des questions 14 et 15, montrer que pour la matrice A_n définie au début de la partie 2, on a :
    $$N(((n+1)^2A_n)^{-1})\leq\frac{1}{8}$$
    (b) En déduire que pour toute matrice diagonale $D_n=[d_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $d_{i,i}\geq 0$ pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, on a également
    $$N(((n+1)^2A_n+D_n)^{-1})\leq\frac{1}{8}$$

18. Soit u l'unique solution du problème (1) et $(u_i)_{0\leq i\leq n+1}$ la famille définie par la relation (2) pour $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C}>0$, indépendante de n, telle que

$$\max_{0\leq i\leq n+1}|u(x_i)-u_i|\leq\frac{\tilde{C}}{n^2}$$

Indication : on pourra introduire le vecteur $X={}^t(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ où on a posé $\varepsilon_i=u(x_i)-u_i$ et calculer A_nX.

5 Un second résultat de convergence

On suppose dans cette partie que $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est telle que :

$$\exists\alpha\in]0,1],\ \exists K\geq 0,\ \forall(y,z)\in[0,1]^2,\ |f(y)-f(z)|\leq K|y-z|^\alpha$$

On suppose également que :

$$\forall x\in[0,1],\ c(x)=0$$

On note u la solution associée au système (1).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux polynômes :

$$B_n f(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$$

$$\hat{B}_{n+1}u(X) = \sum_{k=0}^{n} u_k \binom{n+1}{k} X^k(1-X)^{n+1-k}$$

où $u_0, \dots, u_n$ sont solutions du système (2), avec $c = 0$.

19. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x. on pose

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

   (a) Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{E}(f(S_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n f$.
   (b) En déduire les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

20. Montrer que $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire l'inégalité :

$$\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)$$

   pour tous $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

   Indication : On pourra dans un premier temps exprimer $f(x) - B_n f(x)$ en fonction de $\mathbb{E}(f(x) - f(S_n))$.

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1[$ on a :

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)\binom{n-1}{\ell} x^\ell(1-x)^{n-1-\ell}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. On pose $\chi_{n+1} = \hat{B}_{n+1}u - u$.
   (a) Montrer que

$$\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ il existe $\xi \in [0,1]$ tel que

$$\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x)\chi''_{n+1}(\xi)$$

   Indication : on pourra pour $x \in]0,1[$ considérer la fonction

$$h(t) = \chi_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}t(1-t),\ t \in [0,1]$$

24. En déduire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|u - \hat{B}_{n+1}u\|_\infty \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}$$