Polytechnique - ENS Cachan 2008 - PSI

Indice de rotation d'une courbe simple

Première Partie

1. Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$, soit f un relèvement de u, supposé dérivable. Alors $u' = if'\, e^{if} = if'\, u$, donc $f' = -i\,\dfrac{u'}{u} = -i\,\overline{u}\,u'$ puisque $u\,\overline{u} = |u|^2 = 1$.

Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$, soit α un réel tel que $e^{i\alpha} = u(0)$. Posons $f(x) = \alpha - i\displaystyle\int_0^x \overline{u(t)}\,u'(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est une primitive de $-i\,\overline{u}\,u'$, et elle est à valeurs réelles car, en dérivant la relation $|u|^2 = u\,\overline{u} = 1$, on obtient $u'\,\overline{u} + u\,\overline{u}' = 0$, donc $\mathrm{Re}(\overline{u}\,u') = 0$ et $\overline{u}\,u' \in i\mathbb{R}$. Posons alors $v = e^{if}$; on a $v(0) = e^{i\,f(0)} = e^{i\,\alpha} = u(0)$ et

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - u'v}{u^2} = \frac{if'\,e^{if}\,u - u'\,e^{if}}{u^2} = \frac{\overline{u}\,u'u\,e^{if} - u'\,e^{if}}{u^2} = 0$$

car $u\,\overline{u} = 1$, donc la fonction $\dfrac{v}{u}$ est constante et $v = u$, autrement dit f est bien un relèvement de u.

2. L'application $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $e^{i(f+g)} = e^{if}e^{ig} = uv$.

3. Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Alors $x \geq 0$ et $x^2 + y^2 = 1$, donc $x = \sqrt{1-y^2}$, puis

$$\begin{aligned} e^{i\ \arcsin y} &= \cos(\arcsin y) + i\ \sin(\arcsin y) \\ &= \sqrt{1-y^2} + i\,y = x + i\,y = z\ . \end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{F}_T$ vérifie $\|u-1\|_\infty \leq \sqrt{2}$, alors pour tout t réel, on a $u(t) \in \mathcal{U}$ et $\mathrm{Re}\big(u(t)\big) \geq 0$, donc $u(t) = e^{i\,f(t)}$, avec $f : t \mapsto \arcsin\big(\mathrm{Im}(u(t))\big)$. Cette fonction f, continue, à valeurs réelles, est un relèvement de u, à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. *Il y a manifestement ici une erreur d'énoncé.*

Comme $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et T-périodique, on peut l'approcher uniformément par des polynômes trigonométriques T-périodiques (deuxième théorème de Weierstrass) : notamment, il existe une fonction w de la forme $w : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega kt}$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, telle que $\|u-w\|_\infty \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Cette fonction w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$, T-périodique et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (*mais pas à valeurs dans* $\mathcal{U}$*, donc n'appartient pas à* $\mathcal{F}_T^1$).

On a $|w| \geq \big||u| - |u-w|\big| \geq |u| - |u-w| \geq 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$, donc w ne s'annule pas et, en posant $v = \dfrac{w}{|w|}$, on a $v \in \mathcal{F}_T^1$. Par ailleurs, on a aussi $|w| \leq |u| + |u-w| \leq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ensuite, $|v-w| = \left|\dfrac{w}{|w|} - w\right| = \left|\dfrac{w}{|w|}\,(1-|w|)\right| = \big|1-|w|\big|$ et, de $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq |w(t)| \leq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on tire $|v(t) - w(t)| = \big|1 - |w(t)|\big| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout t réel, soit $\|v-w\|_\infty \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $|v| = 1$, on a $\left|\dfrac{u}{v} - 1\right| = |u-v| \leq |u-w| + |w-v| \leq \sqrt{2}$, donc $\|u-v\|_\infty \leq \sqrt{2}$ et $\dfrac{u}{v}$ admet un relèvement f d'après la question **3.** Comme v admet un relèvement g d'après la question **1.**, la fonction $u = \dfrac{u}{v}\,v$ admet pour relèvement $f+g$ d'après la question **2.**

5. Si $e^{if} = e^{ig} = u$, alors l'application $f - g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $2\pi\,\mathbf{Z}$ puisque $e^{i(f-g)} = 1$, il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est nécessairement constante.

Si $u \in \mathcal{F}_T^1$, alors u admet un relèvement f_0 qui est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question **1.** donc tout relèvement f de u est de classe $\mathcal{C}^1$ puisqu'il est de la forme $f = f_0 + C$ avec $C \in 2\pi\,\mathbf{Z}$.

Deuxième Partie

6. Si on choisit f relèvement de u et a réel, alors $e^{if(a+T)} = u(a+T) = u(a) = e^{if(a)}$, donc le réel $f(a+T) - f(a)$ est multiple de 2π ; si g est un autre relèvement de u, on a $g - f$ constant, donc $g(a+T) - g(a) = f(a+T) - f(a)$; enfin, l'application $x \mapsto f(x+T) - f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $2\pi\,\mathbf{Z}$, donc est constante. Il résulte de tout cela que $d_T(u)$ est un entier relatif indépendant du réel a et du choix du relèvement f de u.

7. Soit θ un réel tel que $e^{i\theta} = z_0$, soit f un relèvement de u. Alors

$$u(t) = z_0 \iff e^{if(t)} = e^{i\theta} \iff f(t) = \theta + 2m\pi \quad (m \in \mathbf{Z})\ .$$

Or, $|f(a+T) - f(a)| \geq 2k\pi$, et $f\big([a, a+T[\big)$ est un intervalle (*théorème des valeurs intermédiaires*) contenant $f(a)$ et admettant $f(a+T)$ comme point adhérent, donc contenant l'intervalle J, avec $J = \big[f(a), f(a+T)\big[$ ou $J = \big]f(a+T), f(a)\big]$. L'intervalle J, de longueur au moins égale à $2k\pi$, contient au moins k points distincts de la forme $\theta + 2m\pi$ avec $m \in \mathbf{Z}$, chacun de ces points admettant au moins un antécédent t dans $[a, a+T[$ qui est solution de $u(t) = z_0$. Cette dernière équation a donc au moins k solutions distinctes dans $[a, a+T[$.

8. De la question précédente, on déduit que, si $|d_T(u)| \geq 1$, alors u est surjective. Si u n'est pas surjective, on a donc $d_T(u) = 0$.

9. Soient f un relèvement de u et g un relèvement de v, alors $f + g$ est un relèvement de uv, donc, avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$d_T(uv) = \frac{1}{2\pi}\big((f+g)(a+T) - (f+g)(a)\big) = d_T(u) + d_T(v)\ .$$

De même, $f - g$ est un relèvement de $\dfrac{u}{v}$ et $d_T\Big(\dfrac{u}{v}\Big) = d_T(u) - d_T(v)$.

10. Si $\|u - v\|_\infty < 2$, alors $v(t) \neq -u(t)$ pour tout t, et l'application $\dfrac{u}{v} \in \mathcal{F}_T$ ne prend pas la valeur -1, donc n'est pas surjective. Donc $d_T\Big(\dfrac{u}{v}\Big) = 0$ et $d_T(u) = d_T(v)$.

11. *Remarque. Il est connu que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a la relation $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout couple $(a,b) \in I^2$. Cela peut s'étendre au cas où f est seulement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, en utilisant une subdivision $(a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b)$ de $[a,b]$ telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ et en décomposant l'intégrale par la relation de Chasles ; évidemment, la fonction dérivée f' n'est pas définie en les points x_i de la subdivision, mais il n'y a aucune difficulté pour donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

La fonction $u \in \mathcal{F}_T$ admet un relèvement f et, d'après les questions **1.** et **5.**, ce relèvement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle où u est de classe $\mathcal{C}^1$ avec pour dérivée $-i\,u'\,\overline{u}$, donc f est continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, puis

$$d_T(u) = \frac{1}{2\pi}\,\big(f(a+T) - f(a)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+T} f'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+T} i\,u'(t)\,\overline{u(t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

12. *De la formule de Parseval, par polarisation, on déduit que, si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{c_n(f)}\, c_n(g) = (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Comme u est 2π-périodique, continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $c_n(u') = in\, c_n(u)$, donc

$$d_{2\pi}(u) = (iu|u') = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(iu)\, c_n(u') = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-i)\, \overline{c_n(u)}\, in\, c_n(u) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} n\, \big|c_n(u)\big|^2\ .$$

13. Soit θ un réel tel que $z = e^{i\theta}$.

Soit $F = \big\{t \in [a, a+T[\ \mid u(t) = z\big\} = \big\{t \in [a, a+T[\ \mid f(t) \in \theta + 2\pi\,\mathbf{Z}\big\}$. On suppose $F = \{t_1, \cdots, t_n\}$, avec $a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a+T$ et $n = p+q$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, soit l'intervalle $I_k =]\theta + 2k\pi\ ,\ \theta + 2(k+1)\pi[$.

Supposons d'abord $t_1 > a$, c'est-à -dire $u(a) \neq z$, et posons $t_0 = a$, $t_{n+1} = a+T$. Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique entier relatif k_i tel que $f\big(]t_i, t_{i+1}[\big) \subset I_{k_i}$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si $f'(t_i) > 0$, alors $k_i = k_{i-1} + 1$ tandis que, si $f'(t_i) < 0$, alors $k_i = k_{i-1} - 1$ (*je n'ai pas envie de détailler*). On a finalement $k_n = k_0 + p - q$, et comme $f(a)$ et $f(a+T)$ ne sont pas dans $\theta + 2\pi\,\mathbf{Z}$, on a $f(a) \in I_{k_0}$ et $f(a+T) \in I_{k_n}$ avec $f(a+T) - f(a)$ multiple de 2π, ce qui entraîne $f(a+T) - f(a) = 2\pi(k_n - k_0)$, puis $d_T(u) = k_n - k_0 = p - q$.

Si $t_1 = a$, c'est-à-dire $a \in F$, il suffit de changer de point a et d'en prendre un qui n'appartient pas à F : en effet, l'expression **(1)** de l'énoncé définissant $d_T(u)$ ne dépend pas du choix de ce point a (question **6.**), pas plus que le nombre de solutions de $u(t) = z$ sur un intervalle de la forme $[a, a+T[$ puisque u est T-périodique, pas plus que les nombres p et q puisque f vérifie $f(t+T) = f(t) + 2\pi\, C$, où C est un entier relatif fixé.

Troisième Partie

14. Il suffit en fait de supposer φ lipschitzienne par rapport à la première variable, c'est-à-dire vérifiant

$$\exists k > 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \in [0,1]^2 \quad \forall t \in [a, a+T] \qquad \big|\varphi_\lambda(t) - \varphi_\mu(t)\big| \leq k\, |\lambda - \mu|\ .$$

L'inégalité ci-dessus restera alors vérifiée pour tout t réel grâce à la T-périodicité des applications partielles φ_λ (condition (i)) et s'écrit alors $\|\varphi_\lambda - \varphi_\mu\|_\infty \leq k|\lambda - \mu|$; il en résulte alors la condition (ii) de façon évidente.

15. Soit $\lambda_0 \in [0,1]$; d'après la condition (ii), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad |\lambda - \lambda_0| < \alpha \Longrightarrow \|\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda_0}\|_\infty < 2\ .$$

Pour $\lambda \in [0,1]$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$, on a donc $d_T(\varphi_\lambda) = d_T(\varphi_{\lambda_0})$ d'après la question **10.** L'application $\lambda \mapsto d_T(\varphi_\lambda)$ est donc continue (en fait, "localement constante") sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$, elle est donc constante, d'où $d_T(v) = d_T(\varphi_1) = d_T(\varphi_0) = d_T(u)$.

16. • $\big|\overline{z}e^{it}\big| = |z| < 1$, donc M_z est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique. De plus,

$$\overline{z - e^{it}} = \overline{z} - e^{-it} = -e^{-it}\left(1 - \overline{z}\, e^{it}\right)\ , \quad \text{donc} \quad \big|z - e^{it}\big| = \big|1 - \overline{z}\, e^{it}\big|$$

et M_z est à valeurs dans $\mathcal{U}$. On a donc $M_z \in \mathcal{F}_{2\pi}$.

- Pour $(\lambda, t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, posons $\varphi_\lambda(t) = M_{\lambda z}(t) = \dfrac{\lambda z - e^{it}}{1 - \lambda\,\overline{z}\,e^{it}}$. Alors $\varphi_0(t) = M_0(t) = -e^{it} = e^{i(t+\pi)}$, et $\varphi_1(t) = M_z(t)$. L'application φ est manifestement continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$, chaque application partielle $\varphi_\lambda = M_{\lambda z}$ appartient à $\mathcal{F}_{2\pi}$ puisque $|\lambda z| < 1$ (*cf.* ci-dessus), il ne reste donc plus qu'à montrer la condition (ii) pour prouver que φ est une homotopie entre M_0 et M_z, mais pour cela il suffit de montrer que φ est lipschitzienne par rapport à la première variable (question **14.**). Or,
$$\varphi_\mu(t) - \varphi_\lambda(t) = \frac{(\mu - \lambda)\,z + (\lambda - \mu)\,\overline{z}\,e^{2it}}{(1 - \mu\,\overline{z}\,e^{it})\,(1 - \lambda\,\overline{z}\,e^{it})}$$
et on obtient facilement $|\varphi_\mu(t) - \varphi_\lambda(t)| \leq \dfrac{2}{(1-|z|)^2}\,|\mu - \lambda|$, ce qui donne la conclusion.

Ainsi, l'application M_z est homotope à $M_0 : t \mapsto e^{i(t+\pi)}$. On a clairement $d_{2\pi}(M_0) = 1$, donc $d_{2\pi}(M_z) = 1$ d'après la question **15**.

17. Soit f un relèvement de u ; alors f est T-périodique puisque $d_T(u) = 0$. Posons $\varphi_\lambda(t) = e^{i\lambda f(t)}$, alors $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ est continue, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = u$, chaque application partielle φ_λ appartient à $\mathcal{F}_T$. Enfin,
$$\big|\varphi_\mu(t) - \varphi_\lambda(t)\big| = \big|e^{i\mu f(t)} - e^{i\lambda f(t)}\big| \leq \|f\|_\infty\,|\mu - \lambda|$$
(en utilisant $|e^{is} - e^{it}| \leq |s - t|$, conséquence des inégalités d'accroissements finis) et cela garantit la condition (ii). Donc φ est une homotopie entre 1 et u.

18. On a vu que, si u et v sont homotopes, alors $d_T(u) = d_T(v)$. Réciproquement, si $d_T(u) = d_T(v)$, alors $d_T\Big(\dfrac{v}{u}\Big) = 0$, donc $\dfrac{v}{u}$ est homotope à 1 ; il existe donc une homotopie $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ entre 1 et $\dfrac{v}{u}$. En posant $\psi_\lambda(t) = u(t)\,\varphi_\lambda(t)$, on construit une homotopie entre u et v.

Quatrième Partie

19. Avec $\Gamma_n(t) = e^{int}$, on a bien $\Gamma_n \in \mathcal{A}_{2\pi}$, $\Gamma'_n(t) = i\,n\,e^{int}$, donc $\overrightarrow{T}_{\Gamma_n}(t) = i\,e^{int} = e^{if(t)}$ avec $f(t) = nt + \dfrac{\pi}{2}$. Donc
$$i_{2\pi}(\Gamma_n) = d_{2\pi}(\overrightarrow{T}_{\Gamma_n}) = \frac{1}{2\pi}\,\big(f(2\pi) - f(0)\big) = n\,.$$

20. *Je pense qu'il y a une (petite) erreur d'énoncé.* Avec $\Gamma(t) = \cos(t) + i\,\sin(2t)$, on a $\Gamma \in \mathcal{A}_{2\pi}$, $\overrightarrow{T}_\Gamma(t) = \dfrac{-\sin t + 2i\,\cos(2t)}{\sqrt{\sin^2 t + 4\,\cos^2(2t)}}$. Comme $\big|\overrightarrow{T}_\Gamma(t)\big| = 1$, on a les équivalences
$$\overrightarrow{T}_\Gamma(t) = -i \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,\big(\Gamma'(t)\big) &= 0 \\ \mathrm{Im}\,\big(\Gamma'(t)\big) &< 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t &= 0 \\ \cos(2t) &< 0 \end{cases},$$
ce qui ne se produit jamais puisque $\sin t = 0 \Longrightarrow t \in \pi\,\mathbf{Z} \Longrightarrow \cos(2t) = 1$. On a donc $\overrightarrow{T}_\Gamma(t) \neq -i$ pour tout t réel. L'application $\overrightarrow{T}_\Gamma \in \mathcal{F}_{2\pi}$ n'est donc pas surjective, d'où $d_{2\pi}(\overrightarrow{T}_\Gamma) = 0$ d'après la question **8.**, soit $i_{2\pi}(\Gamma) = 0$.

21. Si $\Gamma \in \mathcal{A}_T$ est paramétré par l'abscisse curviligne (paramétrage normal, la courbe est alors de longueur T), on a $|\Gamma'(t)| = 1$ pour tout t, donc $\overrightarrow{T}_\Gamma = \Gamma' \in \mathcal{F}_T^1$ admet un relèvement $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (que l'on peut interpréter comme une détermination de l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ et $\overrightarrow{T}_\Gamma$), et la courbure est $c = \alpha' = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$. Donc

$$2\pi\, i_T(\Gamma) = 2\pi\, d_T(\Gamma') = 2\pi\, \frac{1}{2\pi}\,\big(\alpha(T) - \alpha(0)\big) = \int_0^T c(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

22. L'application S_Γ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$, elle ne s'annule pas si $x - y \notin T\,\mathbf{Z}$ car l'arc Γ est simple, elle ne s'annule pas non plus si $x - y \in T\,\mathbf{Z}$ car l'arc est régulier. La relation $S_\Gamma(y,x) = S_\Gamma(x,y)$ est claire si $x - y \notin T\,\mathbf{Z}$, et elle résulte de la T-périodicité de Γ (et donc de Γ') si $x - y \in T\,\mathbf{Z}$. Si $x - y \notin T\,\mathbf{Z}$, alors

$$S_\Gamma(x+T,y) = \frac{\Gamma(x+T) - \Gamma(y)}{\sin\big(\frac{\pi}{T}(x+T-y)\big)} = \frac{\Gamma(x) - \Gamma(y)}{-\sin\big(\frac{\pi}{T}(x-y)\big)} = -S_\Gamma(x,y)$$

tandis que, si $x - y = kT$ avec k entier relatif, alors

$$S_\Gamma(x+T,y) = S_\Gamma\big(y+(k+1)T,y\big) = (-1)^{k+1}\,\frac{T}{\pi}\,\Gamma'(y) = -S_\Gamma(y+kT,y) = -S_\Gamma(x,y)\ .$$

Dans les deux cas, $S_\Gamma(x,y+T) = S_\Gamma(y+T,x) = -S_\Gamma(y,x) = -S_\Gamma(x,y)$.

23. Soit $\varphi :]-T,T[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\,\sin\Big(\dfrac{\pi\, t}{T}\Big)$ pour $t \neq 0$ et $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{T}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-T,T[$ (et même sur $\mathbb{R}$) puisqu'elle est développable en série entière. Comme elle ne s'annule pas sur $]-T,T[$, la fonction $\psi = \dfrac{1}{\varphi}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. La fonction $h : U \to]-T,T[$,définie par $h(x,y) = x - y$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction composée $\psi \circ h$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et elle prolonge F. On a donc un prolongement de F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U en posant $F(x,x) = \psi(0) = \dfrac{T}{\pi}$.

24. Pour $x \neq y$, on a

$$G(x,y) = \frac{1}{x-y}\,\int_y^x \Gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Gamma'\big(y + u(x-y)\big)\,\mathrm{d}u \qquad \textbf{(*)}$$

grâce au changement de variable affine $t = y + u(x-y)$. Il semble alors logique de poser $G(x,x) = \Gamma'(x)$ pour que l'égalité **(*)** soit vraie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considérons alors la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{C} \quad ; \qquad (x,y\ ,\ u) \mapsto \Gamma'\big(y + u(x-y)\big)\ .$$

Cette fonction g admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y\ ,\ u) = u\,\Gamma''\big(y + u(x-y)\big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y\ ,\ u) = (1-u)\,\Gamma''\big(y + u(x-y)\big)$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$; si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, alors les fonctions continues $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ sont bornées sur le compact $K \times [0,1]$, on en déduit une condition de domination qui permet d'affirmer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout compact K de $\mathbb{R}^2$, et donc sur $\mathbb{R}^2$ (*en étendant un tout petit peu au cas de deux paramètres les théorèmes du cours sur les intégrales dépendant d'un paramètre*).

25. On vérifie aisément que $\forall (x,y) \in U \quad S_\Gamma(x,y) = G(x,y)\,F(x,y)$, en dissociant les cas $x \neq y$ et $x = y$. La fonction S_Γ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. La relation $S_\Gamma(x+T,y) = -S_\Gamma(x,y)$ montre, par translation, que S_Γ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur la bande $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x-y < 2T\}$ puis, par translations successives, sur toutes les bandes $V_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid kT < x-y < (k+2)T\}$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Tout point de $\mathbb{R}^2$ étant intérieur à au moins une de ces bandes, la fonction S_Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction S_Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc son gradient $(x,y) \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, S_\Gamma(x,y)$ est une application continue sur $\mathbb{R}^2$, donc bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, et notamment sur le pavé $P = [-T,T]^2$. De plus, l'application S_Γ est "bipériodique" :

$$S_\Gamma(x+2T,y) = S_\Gamma(x,y+2T) = S_\Gamma(x,y)\ ;$$

il en est donc de même de son gradient qui est alors borné sur $\mathbb{R}^2$. Des inégalités d'accroissements finis :

$$|S_\Gamma(x',y') - S_\Gamma(x,y)| \leq M\ \|(x',y') - (x,y)\|_2\ ,$$

avec $M = \max\limits_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, S_\Gamma(u,v)\|_2 = \max\limits_{(u,v)\in P} \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, S_\Gamma(u,v)\|_2$, on déduit que S_Γ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

26. L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{Re}\big(\Gamma(t)\big)$, est continue et T-périodique, donc atteint un minimum. Si ce minimum est atteint en a, alors $\mathrm{Re}\big(\Gamma'(a)\big) = \big(\mathrm{Re}(\Gamma)\big)'(a) = 0$ et $S_\Gamma(a,a) = \dfrac{T}{\pi}\,\Gamma'(a)$ est imaginaire pur. *Quitte à reparamétrer l'arc (translation du paramètre t), on peut toujours supposer que $a = 0$.*

27. Par définition (T-périodicité) de u_0, on a $u_0(T) = u_0(0) = \dfrac{S_\Gamma\big(P_0(0)\big)}{\big|S_\Gamma\big(P_0(0)\big)\big|} = \dfrac{S_\Gamma(0,0)}{|S_\Gamma(0,0)|}$. Or, $S_\Gamma\big(P_0(T)\big) = S_\Gamma(T,T) = -S_\Gamma(0,T) = S_\Gamma(0,0)$ d'après la question **22.**, donc $u_0(T) = \dfrac{S_\Gamma\big(P_0(T)\big)}{\big|S_\Gamma\big(P_0(T)\big)\big|}$.

On vérifie facilement (en faisant un dessin ?) que l'application P_0 est continue sur $[0,T]$. La fonction u_0 est bien définie car S_Γ ne s'annule pas, elle est à valeurs dans $\mathcal{U}$, T-périodique, continue sur $[0,T[$ comme composée de fonctions continues, continue à gauche au point T d'après ce qui précède, donc continue sur $\mathbb{R}$; finalement, $u_0 \in \mathcal{F}_T$.

28. On sait que $S_\Gamma(0,0) = S_\Gamma(a,a) \in i\mathbb{R}$, donc $u_0(0) = \dfrac{S_\Gamma(0,0)}{|S_\Gamma(0,0)|} \in \{-i,i\}$.

Pour $t \in \left]0,\dfrac{T}{2}\right[$, on a $P_0(t) = (0,2t)$ et $S_\Gamma(0,2t) = \dfrac{\Gamma(2t)-\Gamma(0)}{\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)}$, avec $0 < \dfrac{2\pi t}{T} < \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) > 0$. Alors $\mathrm{Re}\big(S_\Gamma(P_0(t))\big) = \mathrm{Re}\big(S_\Gamma(0,2t)\big) = \dfrac{\mathrm{Re}\big(\Gamma(2t)\big) - \mathrm{Re}\big(\Gamma(0)\big)}{\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)} \geq 0$

puisque $\operatorname{Re}\big(\Gamma(0)\big) = \min_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{Re}\big(\Gamma(t)\big)$. Donc $\operatorname{Re}\big(u_0(t)\big) \geq 0$ pour tout $t \in \left]0, \dfrac{T}{2}\right[$, et aussi pour $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ par continuité de u_0.

Si $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, alors $P_0(t) = (0, 2t)$ et $P_0\Big(t + \dfrac{T}{2}\Big) = (2t, T)$, donc

$$S_\Gamma \circ P_0\Big(t + \frac{T}{2}\Big) = S_\Gamma(2t, T) = S_\Gamma(T, 2t) = -S_\Gamma(0, 2t) = -S_\Gamma \circ P_0(t)\ .$$

Donc $u_0\Big(t + \dfrac{T}{2}\Big) = -u_0(t)$.

29. L'application $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est continue (vérifier le raccordement au point $\dfrac{T}{2}$). Des questions **3.** et **28.**, on déduit que $u_0 = e^{if}$ sur $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$. De plus, $u_0\Big(\dfrac{T}{2}\Big) = -u_0(0) \in \{-i, i\}$, donc $2\arcsin\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(\frac{T}{2})\big)\Big) \in \{-\pi, \pi\}$ et, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, on a $f\Big(t + \dfrac{T}{2}\Big) = \pm\pi + f(t)$, donc

$$e^{i\,f\left(t+\frac{T}{2}\right)} = -e^{i\,f(t)} = -u_0(t) = u_0\Big(t + \frac{T}{2}\Big)\ .$$

Ainsi, f est un relèvement de u_0 sur $[0, T]$.

On a $f\Big(\dfrac{T}{2}\Big) = \arcsin\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(\frac{T}{2})\big)\Big) = \arcsin\Big(\operatorname{Im}\big(-u_0(0)\big)\Big) = -f(0)$ et

$$f(T) = 2\arcsin\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(\frac{T}{2})\big)\Big) - \arcsin\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(0)\big)\Big) = -3\,f(0)\ .$$

Donc $f(T) - f(0) = 2\,f\Big(\dfrac{T}{2}\Big) - 2\,f(0) = -4\,f(0)$.

Enfin, $d_T(u_0) = \dfrac{1}{2\pi}\big(f(T) - f(0)\big) = -\dfrac{2}{\pi}\,f(0) \in \{-1, 1\}$ car $f(0) = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

30. Les applications P_0 et P_1 sont bornées sur $[0, T]$ (car continues sur le segment $[0, T]$) : si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $\|P_0(t)\|_\infty \leq T$ et $\|P_1(t)\|_\infty \leq T$ sur $[0, T]$. Avec le même choix de norme sur $\mathbb{R}^2$, l'application P_1 est 1-lipschitzienne sur $[0, T]$ et l'application P_0 est 2-lipschitzienne sur $[0, T]$ (*faire un dessin*). Pour $(\lambda, t) \in [0,1]\times[0,T]$ et $(\mu, s) \in [0,1]\times[0,T]$, on peut décomposer

$$\big|X(\mu, s) - X(\lambda, t)\big| \leq \big|X(\mu, s) - X(\lambda, s)\big| + \big|X(\lambda, s) - X(\lambda, t)\big|\ ,$$

avec

$$\begin{aligned} \big\|X(\mu, s) - X(\lambda, s)\big\| &= \|P_\mu(s) - P_\lambda(s)\| = \big\|(\mu - \lambda)\,\big(P_1(s) - P_0(s)\big)\big\| \\ &\leq |\mu - \lambda|\,\big(\|P_1(s)\| + \|P_0(s)\|\big) \leq 2T\,|\mu - \lambda|\ . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \big\|X(\lambda, s) - X(\lambda, t)\big\| &= \|P_\lambda(s) - P_\lambda(t)\| \\ &= \big\|\lambda\,P_1(s) + (1-\lambda)\,P_0(s) - \lambda\,P_1(t) - (1-\lambda)\,P_0(t)\big\| \\ &\leq \lambda\,\|P_1(s) - P_1(t)\| + (1-\lambda)\,\|P_0(s) - P_0(t)\| \\ &\leq \|P_1(s) - P_1(t)\| + \|P_0(s) - P_0(t)\| \leq 3\,|s - t|\ . \end{aligned}$$

Finalement, $\left|X(\mu,s)-X(\lambda,t)\right| \leq 2T\,|\mu-\lambda|+3\,|s-t| \leq (2T+3)\,\left\|(\mu,s)-(\lambda,t)\right\|_\infty$, et l'application X est lipschitzienne de $[0,1]\times[0,T]$ vers $\mathbb{R}^2$.

On a toujours $S_\Gamma \circ P_\lambda(T) = S_\Gamma(T,T) = S_\Gamma(0,0) = S_\Gamma \circ P_\lambda(0)$, donc $\varphi_\lambda(T) = \dfrac{S_\Gamma\big(P_\lambda(T)\big)}{\big|S_\Gamma\big(P_\lambda(T)\big)\big|}$, ce qui prouve la continuité sur $\mathbb{R}$ des applications partielles φ_λ. De cette continuité partielle et du caractère lipschitzien de l'application X (et donc aussi de l'application $S_\Gamma \circ X$ par composition), on déduit la continuité de $\varphi : (\lambda,t) \mapsto \varphi_\lambda(t)$ sur $[0,1]\times[0,T]$, puis sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ (*pas envie de détailler*). On a $\varphi_0(t) = \dfrac{S_\Gamma\big(P_0(t)\big)}{\big|S_\Gamma\big(P_0(t)\big)\big|} = u_0(t)$ et

$$\varphi_1(t) = \frac{S_\Gamma\big(P_1(t)\big)}{\big|S_\Gamma\big(P_1(t)\big)\big|} = \frac{S_\Gamma(t,t)}{|S_\Gamma(t,t)|} = \frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma'(t)|} = \overrightarrow{T}_\Gamma(t)\ .$$

Pour $\lambda \in [0,1]$ fixé, l'application partielle φ_λ est T-périodique, continue, à valeurs dans $\mathcal{U}$ donc appartient à $\mathcal{F}_T$ ce qui donne la condition (i). Enfin, l'application $S_\Gamma \circ X$ est lipchitzienne sur $[0,1]\times[0,T]$ comme composée d'applications lipschitziennes ; de plus elle est continue sur un compact et ne s'annule pas, donc il existe m et M strictement positifs tels que $m \leq |S_\Gamma \circ X| \leq M$ et l'application $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$ est lipschitzienne sur la couronne $\big\{z \in \mathbb{C} \mid m \leq |z| \leq M\big\}$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur un compact) ; par composition encore, φ est lipschitzienne sur $[0,1]\times[0,T]$ ce qui garantit la condition (ii). Donc φ est une homotopie entre u_0 et $\overrightarrow{T}_\Gamma$.

Finalement, $i_T(\Gamma) = d_T(\overrightarrow{T}_\Gamma) = d_T(u_0) \in \{-1\ ,\ 1\}$.