Concours X Ens 2006 - PSI - Maths (4H)

Première Partie

1. (a) La fonction indicatrice de l'intervalle $]-1,1[$ est continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, positive, ne prend pas la valeur 0 sur l'intervalle $]-1,1[$ et vérifie évidemment la propriété (iii).

   (b) La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)w(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues par morceaux. D'après l'hypothèse (iii) la fonction $x \mapsto x^2 P(x)Q(x)w(x)$ est de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$, donc la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)w(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (règle de Riemann).

   (c) L'application $(P,Q) \mapsto \langle P \,|\, Q \rangle_w$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale ; elle est de manière évidente symétrique. Si P n'est pas le polynôme nul, la fonction $x \mapsto P^2(x)w(x)$ est continue par morceaux et positive ; si son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle, elle est nulle sauf peut-être aux discontinuités de w ; comme P a un nombre fini de zéros, la fonction w est nulle partout sauf peut-être en un nombre fini de points sur chaque segment réel ; cela entre en contradiction avec l'hypothèse qu'il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel la fonction w ne prend pas la valeur 0 ; on en déduit que la forme bilinéaire symétrique $(P,Q) \mapsto \langle P \,|\, Q \rangle_w$ est définie positive ; c'est donc un produit scalaire.

2. (a) On peut choisir pour P_0 le polynôme constant qui est de norme 1 et > 0 ; pour $n > 0$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension 1. On peut prendre pour P_n le polynôme de norme 1 dans cet orthogonal dont le coefficient dominant est > 0. Le degré de P_n est exactement n car P_n ne peut pas être dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. La suite (P_n) est alors une une suite w-orthonormale échelonnée.

   La suite $P_0 \dots P_{n-1}$ étant supposée connue, la projection orthogonale de X^n sur l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est :

$$U_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n \,|\, P_k \rangle_w \, P_k$$

   le polynôme U_n n'est pas nul, il est de degré exactement n et il est proportionnel à P_n. Avec notre définition (polynôme de norme 1 et de coefficient dominant > 0) :

$$P_n = \frac{U_n}{\|U_n\|_w}$$

   (b) Pour $n = 0$ les polynômes P_n et Q_n sont constants non nuls ; pour $n > 0$ les polynômes P_n et Q_n sont tous les deux non nuls dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, et cet orthogonal est de dimension 1.

3. Le réel a_n est tout simplement le coefficient dominant de P_n, le coefficient b_n est le "sous-dominant", ce qui a un sens pour $n > 0$ (par convention $b_0 = 0$).
   (a) Il est clair par définition que $\langle XP_n \,|\, Q\rangle_w = \langle P_n \,|\, XQ\rangle_w$, et comme XQ est de degré $< n$, par définition de P_n, $\langle P_n \,|\, XQ\rangle_w = 0$.
   (b) La famille $(P_k)_{k=0..n+1}$ est une base orthogonale de l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on peut donc écrire (de manière unique) :
   $$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k$$
   avec pour $k = 0..n+1$:
   $$\langle XP_n \,|\, P_k\rangle_w = \lambda_k \|P_k\|_w^2$$
   La propriété à démontrer est naturellement vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Si $n \geq 2$, Comme XP_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ les coordonnées λ_k pour $k \leq n-2$ sont toutes nulles, cqfd.
   (c) Dans l'égalité (1) l'égalité des coefficients de X^{n+1} donne $a_n = \alpha_n a_{n+1}$, soit $\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, cette égalité est vraie aussi pour $n = 0$; l'égalité des coefficients de X^n donne $b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n$ soit :
   $$\beta_n = \frac{1}{a_n}\left(b_n - \frac{a_n}{a_{n+1}} b_{n+1}\right) = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$
   En prenant le produit scalaire avec P_{n-1} dans l'égalité (1), comme la famille (P_k) est orthogonale on trouve :
   $$\langle XP_n \,|\, P_{n-1}\rangle_w = \gamma_n \|P_{n-1}\|_w^2$$
   et :
   $$\langle XP_n \,|\, P_{n-1}\rangle_w = \langle P_n \,|\, XP_{n-1}\rangle_w = \langle P_n \,|\, \alpha_{n-1}P_n + \beta_{n-1}P_{n-1} + \ldots\rangle_w$$
   donc :
   $$\gamma_n = \alpha_{n-1}\frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2}$$

Deuxième Partie

4. (a) Le polynôme Q_n ne peut être que P_n/R_n ; il s'agit donc de montrer que ce quotient, qui est bien un polynôme dans tous les cas, "a un signe constant sur J".
   Dans tous les cas ce polynôme n'a pas de zéros d'ordre impair sur J ; dans la décomposition de Q_n en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les facteurs sont, soit une constante, soit irréductibles du second degré, de signe constant, soit de la forme $(X-t)^{2k+1}$ avec $t \notin J$, de signe constant sur J, soit de la forme $(X-t)^{2k}$ (où $t \in J$ n'est pas exclu) qui est "de signe constant" sur J. Le produit est donc "de signe constant" sur J.

(b) Comme r_n est dans tous les cas le degré de R_n, si $r_n < n$, le polynôme P_n est orthogonal à R_n. Cela impliquerait :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x)R_n^2(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_J Q_n(x)R_n^2(x)w(x)\mathrm{d}x$$

En supposant par exemple que Q_n est ≥ 0 sur J, la fonction sous l'intégrale reste ≥ 0 sur J ; comme elle est continue par morceaux, elle est nécessairement nulle, sauf peut-être aux discontinuités, qui sont en nombre fini sur tout segment dans J ; comme Q_n et R_n n'ont qu'un nombre fini de zéros, cela impliquerait que w est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points sur tout segment inclus dans J. Or il existe un intervalle ouvert non vide, nécessairement inclus dans J, sur lequel w reste > 0 ; un tel intervalle ouvert non vide contient un segment non trivial contenant une infinité de points où w est > 0. Cela étant contradictoire on en déduit que $r_n < n$ est exclu.

Par conséquent le polynôme P_n a au moins n zéros distincts dans J et, comme il est de degré n, il a exactement n zéros, tous simples, qui sont tous dans J.

5. (a) Si (P_n) est une suite w-orthogonale échelonnée, pour toute suite (ε_n) à valeurs dans $\{-1, 1\}$ la suite $(\varepsilon_n P_n/\|P_n\|_w)_n$ est orthonormale et échelonnée.

(b) En utilisant les égalités de la question 3 b) et les égalités $\gamma_n = \alpha_{n-1}$ pour $n \geq 1$, on trouve que toutes les lignes de la matrice colonne produit sont nulles, sauf la dernière qui vaut :

$$\gamma_{n-1}P_{n-2}(\lambda) + \beta_{n-1}P_{n-1}(\lambda) - \lambda P_{n-1}(\lambda) = -\alpha_{n-1}P_n(\lambda)$$

(c) Pour tout zéro λ de P_n le vecteur colonne $(P_0(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda))$ est un vecteur propre de T_n de valeur propre λ (non nul car P_0 est constant non nul). Les zéros de P_n sont donc des valeurs propres de T_n. Comme T_n a au plus n valeurs propres et que les zéros de P_n sont au nombre de n (4.b)), les zéros de P_n sont les valeurs propres de T_n.

6. Il faut remarquer qu'on identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace réel des matrices colonnes de n lignes.

(a) On sait que pour toute matrice inversible M, $M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t\mathrm{Com}(M)$, où $\mathrm{Com}(M)$ est la comatrice de M. Comme $x\mathrm{I}_{n-1} - B$ est la matrice mineure d'indices (n, n) de la matrice $x\mathrm{I}_n - A$, le coefficient (n, n) de ${}^t\mathrm{Com}(x\mathrm{I}_n - A)$ est $(-1)^{n+n}\det(x\mathrm{I}_{n-1} - B)$. On en déduit que le coefficient (n, n) de $(x\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ est

$$\frac{\det(x\mathrm{I}_{n-1} - B)}{\det(x\mathrm{I}_n - A)} = r(x)$$

D'autre part $(x\mathrm{I}_n - A)^{-1}e_n$ est la dernière colonne de la matrice $(x\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ et son produit scalaire avec e_n est sa coordonnée suivant

e_n, puisque (e_k) est une base orthonormée. D'où l'égalité demandée :

$$r(x) = \big\langle (x\mathrm{I}_n - A)^{-1} e_n \,|\, e_n \big\rangle$$

(b) Comme les valeurs propres de A sont au nombre de n, ses espaces propres sont des droites deux à deux orthogonales puisque A est symétrique réelle. La famille (u_i) est donc orthogonale. Le vecteur e_n se décompose dans cette base orthogonale sous la forme :

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \quad \text{avec} \quad \mu_k = \frac{\langle e_n \,|\, u_k \rangle}{\langle u_k \,|\, u_k \rangle}$$

On peut remarquer que pour tout x qui n'est pas valeur propre de A :

$$(x\mathrm{I}_n - A)u_i = (x - \lambda_i)u_i \quad \text{d'où} \quad (x\mathrm{I}_n - A)^{-1} u_i = \frac{1}{x - \lambda_i} u_i$$

On a donc :

$$\big\langle (x\mathrm{I}_n - A)^{-1} e_n \,|\, e_n \big\rangle = \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{x - \lambda_i} \langle u_i \,|\, u_j \rangle = \sum_{i} \frac{\mu_i^2}{x - \lambda_i} \langle u_i \,|\, u_i \rangle$$

En tenant compte de la valeur de μ_i :

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_i} \frac{\langle e_n \,|\, u_i \rangle^2}{\langle u_i \,|\, u_i \rangle}$$

(c) Sur chaque intervalle réel ne contenant aucune valeur propre de A on a :

$$r'(x) = -\sum_{i} \frac{1}{(x - \lambda_i)^2} \frac{\langle e_n \,|\, u_i \rangle^2}{\langle u_i \,|\, u_i \rangle} < 0$$

La fonction r est donc strictement décroissante sur chaque intervalle ne contenant pas de valeur propre de A.

(d) Pour k variant de 1 à $n - 1$, $r(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers λ_k par valeurs supérieures, et vers $-\infty$ quand x tend vers λ_{k+1} par valeurs inférieures ; ceci est une conséquence de l'hypothèse $\langle e_n \,|\, u_i \rangle \neq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue r prend au moins une fois sur l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ la valeur 0. Il existe donc dans chacun de ces $n-1$ intervalles une valeur propre de la matrice B. Comme la matrice B a $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes, on en déduit que B a exactement $n-1$ valeurs propres, toutes zéro simple du polynôme caractéristique (et le sous-espace propre est de dimension 1) et que dans chacun des intervalles $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ il y a exactement une valeur propre de B. Si on note μ_k cette valeur propre, les suites (μ_k) et (λ_k) vérifient les conditions de l'énoncé.

7. (a) D'après les égalités de la question 3.b, si P_{n+1} et P_n avaient un zéro commun ce serait aussi un zéro commun de P_n et P_{n-1} ($\gamma_n \neq 0$) et par récurrence un zéro de P_0, ce qui est impossible puisque P_0 est constant non nul.

   On peut appliquer la question 6 en remplaçant la matrice A par la matrice T_n. Le spectre de T_n est la suite $(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)})$ et un vecteur propre $u_i^{(n)}$ de valeur propre $\lambda_i^{(n)}$ est le vecteur colonne $(P_0(\lambda_i^{(n)}), \dots, P_{n-1}(\lambda_i^{(n)}))$. Son produit scalaire avec le vecteur e_n est $P_{n-1}(\lambda_i^{(n)})$ qui n'est pas nul puisque P_n et P_{n-1} n'ont pas de zéro commun. La matrice B est ici la matrice T_{n-1} et les inégalités à démontrer sont donc celles de la question 6.d.

   (b) Si (P_n) est une suite w-orthogonale échelonnée, la suite $(Q_n) = (P_n/\|P_n\|)$ est orthonormale échelonnée et on peut lui appliquer les résultats de la question 7. Comme P_n et Q_n ont les mêmes zéros, on en déduit qu'on peut appliquer les résultats de la question 7 à la suite P_n.

Troisième partie

8. Posons $P_i = \prod_{j \neq i}(X - x_j)$. Ce polynôme est bien élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il est nul en tous les x_j pour $j \neq i$ et non nul en x_i. Si (λ_j) est une famille de scalaires telle que $\sum_j \lambda_j \varphi_j = 0$, alors pour tout i :

$$\sum_j \lambda_j \varphi_j(P_i) = \sum_j \lambda_j P_i(x_j) = \lambda_i P_i(x_i) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_i = 0$$

   La famille (φ_j) est donc libre, et comme l'espace est de dimension n et que le cardinal de l'ensemble des indices est aussi n, c'est une base de l'espace.

9. (a) Posons $U = DP_n + R$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (division euclidienne). Comme les $\lambda_i^{(n)}$ sont des zéros de P_n, U et R prennent les mêmes valeurs sur ces réels. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange il y a unicité d'un tel polynôme.

   (b) On observe que :

$$\int_{\mathbb{R}} U(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (D(x)P_n(x) + R(x))w(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \langle D \mid P_n \rangle_w + \int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)\mathrm{d}x$$

   En effet le polynôme D est nécessairement de degré $\leq n-1$, donc orthogonal à P_n.

   (c) L'application $R \mapsto \int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)\mathrm{d}x$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc une combinaison linéaire des formes $\varphi_i^{(n)}$, où $\varphi_i^{(n)}$ est la forme linéaire $R \mapsto R(\lambda_i^{(n)})$. Il existe par conséquent une famille (c_i) de scalaires, les coordonnées de cette forme, telle que pour tout $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i^{(n)}(R) = \sum_{i=1}^{n} c_i R(\lambda_i^{(n)})$$

Cette égalité s'étend aux polynômes de degré $\leq 2n-1$ d'après les questions a) et b).

(d) Posons

$$Q_j^{(n)} = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i^{(n)})$$

Ce polynôme est nul en les $\lambda_i^{(n)}$ pour $i \neq j$ et non nul en $\lambda_j^{(n)}$; il est de degré $n-1$. On peut appliquer le c) à son carré, de degré $2n-2 \leq 2n-1$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(Q_j^{(n)}(x) \right)^2 w(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(Q_j^{(n)}(\lambda_i^{(n)}) \right)^2 = c_j \left(Q_j^{(n)}(\lambda_j^{(n)}) \right)^2$$

Autrement dit :

$$c_j = \frac{\left\langle Q_j^{(n)} \mid Q_j^{(n)} \right\rangle_w}{\left(Q_j^{(n)}(\lambda_j^{(n)}) \right)^2} > 0$$

10. (a) Fixons un réel $\varepsilon > 0$ tel que $s + \varepsilon < t - \varepsilon$. Pour tout réel positif K introduisons la fonction continue affine par morceaux A_K qui vaut -1 à l'extérieur de $[s,t]$ et qui vaut K sur $[s+\varepsilon, t-\varepsilon]$. Cette fonction prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, K]$. Comme w est positive, on a :

$$\int_a^b A_K(x)w(x)\mathrm{d}x \geq -\int_a^{s+\varepsilon} w(x)\mathrm{d}x + K \int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} w(x)\mathrm{d}x - \int_{t-\varepsilon}^{b} w(x)\mathrm{d}x$$

Comme $\int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} w(x)\mathrm{d}x > 0$ on peut trouver K assez grand de telle sorte que :

$$\int_a^b A_K(x)w(x)\mathrm{d}x > \int_a^b w(x)\mathrm{d}x$$

D'après le théorème de Weierstrass il existe un polynôme V qui approche uniformément A_K à moins de 1 (strictement). Il est alors certain que V est strictement négatif à l'extérieur de $[s,t]$ et d'autre part :

$$\int_a^b V(x)w(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b A_K(x)w(x)\mathrm{d}x - \int_a^b w(x)\mathrm{d}x > 0$$

(b) Un intervalle ouvert non vide contenu dans J est de la forme $]s,t[$ avec $a \leq s < t \leq b$. Soit V un polynôme vérifiant les conditions du a) et n entier tel que $V \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Supposons qu'aucun des réels $(\lambda_1^{(n)},\dots,\lambda_n^{(n)})$ n'est dans $]s,t[$; ils sont dans J d'après 4.b) donc les valeurs de V en ces réels sont strictement négatives. L'égalité de la question 9.c) donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_a^b V(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n c_i V(\lambda_i^{(n)})$$

D'après 9.d) les constantes c_i sont strictement positives ; on en déduit :

$$\int_a^b V(x)w(x)\mathrm{d}x < 0$$

ce qui est contradictoire.

On en déduit que l'intervalle $]s,t[$ coupe Λ.

Quatrième partie

11. (a) Comme J est un segment et f continue sur J, il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers f sur J. Comme les fonctions f et w sont bornées sur J (w est continue par morceaux), il est clair que la suite de fonctions (fP_nw) converge uniformément vers f^2w sur le segment J ; on en déduit que la suite $(\int_J fP_nw)$, qui est la suite nulle, converge vers $\int_J f^2w$ qui est donc nulle.

(b) La fonction f^2w est continue par morceaux positive d'intégrale nulle ; elle donc nulle sauf peut-être aux discontinuités de w qui sont en nombre fini dans J ; comme w reste > 0 sur J on en déduit que f est nulle sur J sauf peut-être en un nombre fini de points donc partout puisqu'elle est continue.

La fonction w a donc bien la propriété (D_J).

12. (a) La fonction $f_{\mu,\alpha,n}$ sous l'intégrale est bien continue par théorèmes généraux sur $[0,+\infty[$. Son module est la fonction :

$$g_{\mu,\alpha,n}\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^\mu \cos\alpha} x^n$$

Comme $\cos\alpha > 0$, par croissance comparée $x^2 g_{\mu,\alpha,n}(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$; par conséquent $f_{\mu,\alpha,n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (règle de Riemann).

(b) L'application $x \mapsto x^\mu$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même ; on peut donc poser dans l'intégrale $y = x^\mu$ ou $x = y^{1/\mu}$; on obtient :

$$I_n(\mu,\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n}{\mu}} \frac{1}{\mu} y^{\frac{1}{\mu}-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1}\mathrm{d}y$$

L'égalité de l'énoncé s'en déduit sans difficulté ; la convergence de l'intégrale définissant $K_n(\mu,\alpha)$ est une conséquence du théorème de changement de variable dans les intégrales sur des intervalles quelconques.

(c) Il suffit de montrer la continuité et la dérivabilité de l'application :

$$\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} \mathrm{d}y$$

L'application $h\colon\ (\alpha, y) \mapsto \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine ouvert $]-\pi/2, +\pi/2[\times]0, +\infty[$. Si $\alpha_0 \in]-\pi/2, +\pi/2[$ est fixé, pour tout $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ et $y > 0$ on a la majoration :

$$|h(\alpha, y)| = \mathrm{e}^{-y\cos\alpha} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} \leq \mathrm{e}^{-y\cos\alpha_0} y^{\frac{n+1}{\mu}-1}$$

La fonction majorante est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} h(\alpha, y)\mathrm{d}y$ est continue sur $]-\pi/2, +\pi/2[$.
On a aussi dans les mêmes conditions :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, y) = -y\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}}$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, y)\right| = \mathrm{e}^{-y\cos\alpha} y^{\frac{n+1}{\mu}} \leq \mathrm{e}^{-y\cos\alpha_0} y^{\frac{n+1}{\mu}}$$

La fonction majorante est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} h(\alpha, y)\mathrm{d}y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, +\pi/2[$.

(d) De plus la dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme ; par conséquent, pour tout $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial K_n}{\partial \alpha}(\mu, \alpha) =$$

$$\mathrm{i}\frac{n+1}{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{\mu}\alpha} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} \mathrm{d}y - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{\mu}\alpha} \int_0^{+\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}} \mathrm{d}y =$$

$$= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{\mu}\alpha} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} \left(\frac{n+1}{\mu} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} y^{\frac{n+1}{\mu}}\right) \mathrm{d}y$$

On reconnaît sous l'intégrale la dérivée de la fonction

$$y \mapsto \mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}}$$

On en déduit (en particulier car $-y\cos\alpha \underset{y\to+\infty}{\to} -\infty$) :

$$\frac{\partial K_n}{\partial \alpha}(\mu, \alpha) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{\mu}\alpha} \left[\mathrm{e}^{-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}}\right]_{y\to 0}^{y\to+\infty} = 0$$

La fonction $\alpha \mapsto K_n(\mu, \alpha)$ est donc constante sur $]-\pi/2, +\pi/2[$.

(e) On a donc pour tout $\alpha \in \left]-\pi/2, +\pi/2\right[$ l'égalité :

$$K_n(\mu, \alpha) = K_n(\mu, 0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} \mathrm{d}y = \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) \in \mathbb{R}$$

Par conséquent :

$$I_n(\mu, \alpha) = \frac{1}{\mu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{\mu}\alpha}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right)$$

En particulier on voit que si $\alpha = \pi\mu$, avec $\mu < 1/2$, ce qui implique $\alpha \in \left]0, \pi/2\right[$:

$$I_n(\mu, \pi\mu) = \frac{1}{\mu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) \in \mathbb{R}$$

La partie imaginaire de $I_n(\mu, \pi\mu)$ est donc nulle.

(f) On a :

$$I_n(\mu, \pi\mu) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^\mu(\cos\pi\mu + \mathrm{i}\sin\pi\mu)}\, x^n \mathrm{d}x$$

La partie imaginaire est nulle donc :

$$0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^\mu \cos\pi\mu} \sin(x^\mu \sin\pi\mu)\, x^n \mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a aussi :

$$0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^\mu \cos\pi\mu} \sin(x^\mu \sin\pi\mu)\, P(x) \mathrm{d}x$$

Posons $\varphi_\mu : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^\mu \cos\pi\mu} \sin(x^\mu \sin\pi\mu)$ sur $J = [0, +\infty[$. Pour toute fonction continue $w \in \mathcal{W}_J$ (il en existe, par exemple $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$), pour tout polynôme P :

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_\mu(x)}{w(x)} P(x) w(x)\, \mathrm{d}x$$

La fonction φ_μ/w est bien définie et continue sur J puisque w est supposée continue et > 0, elle n'est visiblement pas identiquement nulle. On en déduit qu'aucune fonction continue élément de $\mathcal{W}_J$ n'a la propriété (D_J).