MATHÉMATIQUES

DURÉE: 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Contrôlabilité

Notations

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note alors $\mathcal{C}(\mathbb{R}; E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; E)$) l'ensemble des applications continues (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul, et l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ désigne le produit scalaire de x et y, et $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$, la norme associée.

La notation $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Lorsque $n = m$, on utilise également la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices *inversibles* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 est notée I_n. L'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice carrée A est noté $\operatorname{Sp} A$. Le polynôme $\det(A - XI_n)$ est appelé *polynôme caractéristique* de A.

On identifie une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ à l'application linéaire de matrice A par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et de $\mathbb{K}^n$.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ a pour coefficients a_{ij}, la matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients $b_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ est appelée transposée de A, et notée ${}^tA$. On identifie un vecteur colonne (resp. ligne) de $\mathbb{R}^n$ à une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$). En particulier, pour $x \in \mathbb{R}^n$, la notation ${}^tx$ désigne le vecteur ligne de mêmes composantes que x. Par conséquent, on a $(x \mid y) = {}^tyx$ pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

On appelle *norme matricielle* une norme $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||.$$

I. Exponentielles de matrices

1. Donner un exemple de norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose désormais que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni d'une norme matricielle $|||\cdot|||$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$.
   (a) Montrer que pour tout couple $(p, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p > m$, on a

$$|||S_p - S_m||| \leq \sum_{k=m+1}^{p} \frac{|||A|||^k}{k!}.$$

(b) En déduire que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On notera e^A la limite de cette suite.

(c) Vérifier que A et e^A commutent, et que ${}^t(e^A) = e^{{}^tA}$.

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que e^A est diagonalisable et déterminer $\operatorname{Sp} e^A$ en fonction de $\operatorname{Sp} A$.

4. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(t) = e^{tA}x$.

   (a) Montrer que Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle

   $$X' = AX \tag{1}$$

   avec condition initiale $X(0) = x$.

   (b) Plus généralement, montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$ alors

   $$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & e^{tA}\left(x + \int_0^t e^{-\tau A} f(\tau)\, d\tau\right) \end{cases}$$

   est l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ de

   $$X' = AX + f(t), \qquad X(0) = x.$$

5. Dans cette question, on suppose que A est diagonalisable. On dit qu'une solution Φ de (1) est *asymptotiquement stable* si Φ tend vers 0 en $+\infty$.
   Montrer que toutes les solutions de (1) sont asymptotiquement stables si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle strictement négative.

II. Commandabilité

Dans cette partie, on se donne une paire (A, B) constituée d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (avec éventuellement $m \neq n$). À cette paire, on associe une famille d'équations différentielles :

$$X' = AX + Bu(t), \tag{C}$$

où la fonction (a priori inconnue) u appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$. Cette fonction u est appelée *contrôle*.

On s'intéresse au *problème de commandabilité* associé à la paire (A, B). Plus précisément, étant donné un temps $T > 0$ et un vecteur $x_T \in \mathbb{R}^n$, on cherche à déterminer s'il existe un contrôle $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ tel que l'unique solution $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ de (C) nulle en 0 vérifie $\Phi(T) = x_T$. Si un tel contrôle existe, on dit que l'état x_T est *atteignable* en temps T. On note $\mathcal{A}_T$ l'ensemble des états atteignables en temps T.

6. Montrer que $\mathcal{A}_T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

7. Soit $x_T \in \mathcal{A}_T$ et u un contrôle amenant l'état nul à $t = 0$ à l'état x_T au temps T. Montrer que l'on a

   $$x_T = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)\, ds.$$

8. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,mn}(\mathbb{R})$ la matrice par blocs définie par

   $$C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}.$$

   On note $\operatorname{Im} C = \{CZ \,/\, Z \in \mathbb{R}^{mn}\}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est combinaison linéaire de la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$.

(b) En déduire que $\mathcal{A}_T \subset \operatorname{Im} C$.

9. On rappelle que si $F \subset \mathbb{R}^n$, alors $F^\perp$ désigne $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall y \in F,\ (x \mid y) = 0\}$.

(a) Soit $y \in \mathcal{A}_T^\perp$. Montrer que

$$\int_0^T {}^t y e^{(T-s)A} B {}^t B e^{(T-s){}^t A} y \, ds = 0.$$

(b) En déduire que $y \in \left(\operatorname{Im} C\right)^\perp$ puis comparer $\mathcal{A}_T$ et $\operatorname{Im} C$.

(c) L'ensemble $\mathcal{A}_T$ dépend-il de T ?

10. On dit que la paire (A, B) est *commandable* en temps T si tout état est atteignable en temps T (i.e. $\mathcal{A}_T = \mathbb{R}^n$).

(a) Montrer que la paire (A, B) est commandable si et seulement si le rang de C est n.

(b) En déduire qu'une paire commandable en temps T est aussi commandable en temps T' pour tout $T' > 0$.

(c) Donner un exemple de paire non commandable.

11. On pose $D = \displaystyle\int_0^T e^{(T-s)A} B {}^t B e^{(T-s){}^t A} \, ds$.

(a) Montrer que D est une matrice carrée symétrique de taille n, et que $\operatorname{Im} D \subset \mathcal{A}_T$.

(b) Montrer que $\operatorname{Ker} D \subset \mathcal{A}_T^\perp$.

(c) Montrer que, pour toute matrice symétrique M, on a $(\operatorname{Im} M)^\perp \subset \operatorname{Ker} M$.

(d) En déduire que $\mathcal{A}_T = \operatorname{Im} D$.

12. Dans toute cette question, on suppose que la paire (A, B) est commandable.

(a) Justifier l'inversibilité de D.

(b) Soit $x_T \in \mathbb{R}^n$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $v(s) = {}^t B e^{(T-s){}^t A} D^{-1} x_T$. Montrer que le contrôle v envoie l'état nul à $t = 0$ sur l'état x_T au temps $t = T$.

(c) Montrer que pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ transformant l'état nul à $t = 0$ en l'état x_T au temps T, on a

$$\int_0^T \big(v(s) \mid (u(s) - v(s)\big) \, ds = 0.$$

(d) En déduire que le contrôle v est celui qui minimise l'énergie : pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ amenant 0 à x_T en temps T, on a

$$\int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds \geq \int_0^T \|v(s)\|^2 \, ds$$

avec égalité si et seulement si $u = v$.

13. Application : on s'intéresse à l'équation différentielle scalaire suivante

$$(H) \qquad x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 u(t)$$

où $\omega_0 \in]0, +\infty[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres donnés, et $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

(a) Résoudre (H) dans le cas $u = 0$ et $\lambda \in [0, \omega_0[$.

(b) Trouver une paire (A, B) telle que (H) puisse s'écrire comme un système de commande de type

$$(H') \qquad X'(t) = AX + Bu(t).$$

(c) La paire (A, B) est-elle commandable ?

III. Stabilisation par retour d'état

Dans cette partie, on s'intéresse aux contrôles dépendant linéairement de la solution X. Plus précisément, on suppose que $u = KX$ où $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. De tels contrôles sont appelés *retours d'état* (en anglais *feedbacks*).

On cherche à déterminer s'il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que toute solution de

$$X' = AX + B(KX)$$

soit asymptotiquement stable. Une paire (A, B) vérifiant cette propriété est dite *stabilisable.*

14. Montrer que pour tout couple $(\lambda, \omega_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\omega_0 > 0$, la paire associée à l'équation différentielle (H') définie dans la question 13 est stabilisable.
15. Dans le cas $\lambda = 0$, peut-on trouver un réel k tel que toute solution de (H') avec $u(t) = kx(t)$ soit asymptotiquement stable ?
16. On dit que la paire (A, B) est conjuguée à la paire $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\widetilde{A} = P^{-1}AP$ et $\widetilde{B} = P^{-1}B$. Montrer que la paire (A, B) est commandable si et seulement si la paire $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ l'est.
17. Dans toute cette question, on suppose que $m = 1$ et que (A, B) est commandable. On identifie B au vecteur $b = (b_1, \cdots, b_n)$.
    (a) Vérifier que la famille de vecteurs $(b, Ab \cdots, A^{n-1}b)$ engendre $\mathbb{R}^n$ et qu'il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que
    $$A^n b = a_0 b + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}b.$$
    (b) On pose $f_n = b$ et l'on définit $(f_{n-1}, \cdots, f_1)$ par la relation de récurrence $f_j = Af_{j+1} - a_j f_n$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
    (c) En déduire que la paire (A, B) est conjuguée à la paire $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ suivante :
    $$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
    (d) Soit $F \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et de cœfficient dominant $(-1)^n$. Montrer qu'il existe $\widetilde{K} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que F soit le polynôme caractéristique de la matrice $\widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{K}$.
    (e) En déduire l'existence de $K \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que F soit le polynôme caractéristique de la matrice $A + BK$.
18. Dans le cas $m = 1$, montrer que (A, B) commandable entraîne (A, B) stabilisable.