Corrigé de l'épreuve de mathématiques 2003

concours X-Cachan

0. préliminaires

1 La norme N vérifie $\forall A,B,\ N(A.B) \leqslant N(A).N(B)$ ce qui par récurrence sur k nous donne :
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N(B^k) \leqslant (N(B))^k$.
$\forall B \in \mathcal{M}_n,\ \dfrac{N(B)^k}{k!}$ est le terme général d'une série convergente de somme $e^{N(B)}$. Comme $\mathcal{M}_n$ est un espace vectoriel de dimension finie donc complet, toute série absolument convergente est convergente, donc $\sum \dfrac{B^k}{k!}$ est une série absolument convergente (de plus on a : $N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{B^k}{k!}\right) \leqslant e^{n(B)}$).

conclusion : $\boxed{\forall B \in \mathcal{M}_n,\ \sum \dfrac{B^k}{k!} \text{ est une série convergente}}$

2 $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n,\ \sum \dfrac{A^k}{k!}$ et $\sum \dfrac{B^k}{k!}$ sont deux séries absolument convergentes donc le produit de Cauchy de ces deux séries est une série absolument convergente et sa somme est égale au produit des 2 sommes donc pour $C_k = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{1}{i!}A^i \dfrac{1}{(k-i)!}B^{k-i} = \dfrac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i A^i B^{k-i} = \dfrac{1}{k!}(A+B)^k$ si A et B commutent.
$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}\right) . \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{B^k}{k!}\right) = \exp(A).\exp(B)$
Comme B et $-B$ commutent, $\begin{cases} \exp(0) = \exp(B + (-B)) = \exp(B).\exp(-B) \\ \exp(0) = \exp((-B) + B) = \exp(-B).\exp(B) \end{cases}$
Comme $\exp(0) = \mathbb{1}$, on en déduit :
$\forall B \in \mathcal{M}_n,\ \exp(B).\exp(-B) = \exp(-B).\exp(B) = \mathbb{1}$ d'où

conclusion : $\boxed{\exp(B) \in GL_n \text{ et } (\exp(B))^{-1} = \exp(-B)}$

3 $\forall B \in \mathcal{M}_n,\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_k : t \mapsto \dfrac{t^k B^k}{k!}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $u_0' : t \mapsto 0,\ u_k' : t \mapsto \dfrac{t^{k-1}B^k}{(k-1)!}$ pour $k \geqslant 1$.

- $\sum u_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \|u_k'\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant \dfrac{N(B^k).a^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant \underbrace{\dfrac{N(B)^k.a^{k-1}}{(k-1)!}}_{\text{terme général d'une série convergente}} \Rightarrow \sum u_k'$ converge normalement sur $[-a,a]$

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de dérivation des séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel réel de dimension finie d'où :
$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k'$

$\Rightarrow \Phi$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$, et $\forall t \in]-a,a[,\ \Phi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^{k-1}B^k}{(k-1)!} = B.\Phi(t) = \Phi(t).B$.

Ce résultat étant valable pour tout réel a de $\mathbb{R}_+$, on a :

conclusion : $\boxed{\Phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \Phi' : t \longmapsto B.\Phi(t) = \Phi(t).B}$

4. on a : $\left.\begin{array}{r} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k B^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \exp(tB) \\ \forall n \in \mathbb{N}, B.\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k B^k}{k!}\right) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k B^k}{k!}\right).B. \end{array}\right\}$

Comme l'application $\left(\begin{array}{ccc} (A,B) & \mapsto & A.B \\ \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n & \to & \mathcal{M}_n \end{array}\right)$ est bilinéaire donc continue car nous sommes en dimension finie, par passage à la limite, on obtient :

conclusion : $\boxed{\forall B \in \mathcal{M}_n,\ \forall t \in \mathbb{R},\ B.\exp(tB) = \exp(tB).B}$

I. ÉQUATION DE LAX

1.(a) Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall(A_1,A_2) \in \mathcal{M}_n^2,\ \forall B \in \mathcal{M}_n, [\alpha A_1 + \beta A_2, B] = (\alpha A_1 + \beta A_2).B - B.(\alpha A_1 + \beta A_2)$

$= \alpha(A_1 B - B.A_1) + \beta(A_2 B - B.A_2) = \alpha[A_1,B] + \beta[A_2,B]$

de même , $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall A \in \mathcal{M}_n, \forall(B_1,B_2) \in \mathcal{M}_n^2,\ [A, \alpha B_1 + \beta B_2] = \alpha[A,B_1] + \beta[A,B_2]$

et $\forall A \in \mathcal{M}_n,\ [A,A] = A.A - A.A = 0$

conclusion : $\boxed{(A,B) \mapsto [A,B] \text{ est bilinéaire alternée.}}$

1.(b) $\forall(A,B) \in \mathcal{M}_n^2,\ \mathrm{Tr}([A,B]) = \mathrm{Tr}(AB - BA) \underbrace{=}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de fct tr}}} \mathrm{Tr}(AB) - \underbrace{\mathrm{Tr}(BA)}_{=\mathrm{Tr}(BA)} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}[A,B] = 0}$

1.(c) Soient A et B deux matrices antisymétriques.

${}^t[A,B] = {}^t(AB - BA) = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB\,{}^tA - {}^tA\,{}^tB = (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A,B]$

conclusion : $\boxed{[A,B] \text{ est antisymétrique}}$.

1.(d) Soit $(A,B) \in (\mathcal{T}_n)^2,\ C = A.B = (c_{i,j}),\ A = (a_{i,j}),\ B = (b_{i,j})$.

Soit $j < i,\ c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0 \text{car } i>k}.b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0 \text{car } k\geqslant i>j} = 0$

On a donc : $(\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j < i \Rightarrow c_{i,j}) \Rightarrow C \in \mathcal{T}_n$.

conclusion : $\boxed{\forall A,B \in \mathcal{T}_n,\ A.B \in \mathcal{T}_n}$

2.(a) $t \mapsto A(t)$ est de classe C^1 sur I si et seulement si les coefficients de $A(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur I. On a aussi : $A^{-1}(t) = \dfrac{1}{\det(A(t))}.{}^t\mathrm{C}om(A(t))$.

- $t \mapsto \det(A(t))$ est C^1 sur I car $\det(A(t))$ s'exprime comme une somme de produits des coefficients de $A(t)$ donc comme une somme de produits de fonctions de classe C^1 sur I.
- de plus, $\det(A(t))$ ne s'annule pas sur I car $\forall t \in I,\ A(t) \in GL_n$ d'où $t \mapsto \dfrac{1}{\det(A(t))}$ est de classe C^1 sur I.
- Tous les coefficients de ${}^t\mathrm{C}om(A(t))$ s'expriment comme des sommes de produits des coefficients de $A(t)$, ils sont donc tous des fonctions de classe C^1 sur I.

Tous les coefficients de $A^{-1}(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur I comme sommes de produits de fonctions de classe C^1.

conclusion : $\boxed{t \mapsto A^{-1}(t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I}$

$\forall t \in I,\ A(t).A^{-1}(t) = \mathbb{1} \Rightarrow \dot{A}(t).A^{-1}(t) + A(t).\dot{A}^{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{A}^{-1}(t) = -A^{-1}(t).\dot{A}(t).A^{-1}(t)}$

2.(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)^{-1}.X.A(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)^{-1}).X.A(t) + A(t)^{-1}.X.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)) = -A^{-1}(t).\dot{A}.A^{-1}(t).X.A(t) + A^{-1}(t).X.\dot{A}(t)$

$$= -\underbrace{A^{-1}(t).\dot{A}}\,.\,\underbrace{A^{-1}(t).X.A(t)}+\underbrace{A^{-1}(t).X.A(t)}\,.\,\underbrace{A^{-1}(t).\dot{A}} = [A^{-1}(t).\dot{A}, A^{-1}(t).X.A(t)]$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(A(t)^{-1}.X.A(t)\big) = [A^{-1}(t).\dot{A}(t), A^{-1}(t).X.A(t)]}$

3. On a : $\forall t \in I,\ \dot{L}(t) = [L(t), M(t)] \Rightarrow \forall t \in I,\quad \underbrace{\mathrm{Tr}(\dot{L}(t))}_{\substack{=\mathrm{Tr}\dot{(L)}(t)\\ \text{par linéarité de Tr}}} = \mathrm{Tr}([L(t), M(t)]) = 0$ d'après I.1.b)

$\Rightarrow \forall t \in I, \mathrm{Tr}\dot{(L)}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}(L(t)) \text{ est constante sur } I}$

4.a.i) <u>cas $B(0) = \mathbb{1}$</u> : notons $C_i(t)$ le $i^{ième}$ vecteur colonne de $B(t)$.

$\det(B(t)) =$ déterminant des vecteurs colonnes de $B(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$$\frac{1}{t}(\det B(t) - \det B(0)) = \frac{1}{t}\,[\det(C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) - \det(C_1(0), \dots, C_n(0))]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\sum_{k=1}^{n}(\det(C_1(0), \dots, C_{k-1}(0), C_k(t), C_{k+1}(t), \dots, C_n(t)) - \det(C_1(0), \dots, C_{k-1}(0), C_k(0), C_{k+1}(t), \dots, C_n(t)))\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\det\big(C_1(0), \dots, C_{k-1}(0), \underbrace{\frac{1}{t}(C_k(t) - C_k(0))}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} C'_k(0)}, \underbrace{C_{k+1}(t)}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} C_{k+1}(0)}, \dots, \underbrace{C_n(t)}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} C_n(0)}\ \big)}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\begin{vmatrix} 1 & & b'_{1,k}(0) & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & 1 & \vdots & & \\ & & b'_{k,k}(0) & & \\ & & \vdots & 1 & \\ 0 & & \vdots & & \ddots \\ & & b'_{n,k}(0) & & 1 \end{vmatrix} = b'_{k,k}(0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\det B(t) - \det B(0)\big) = \sum_{k=1}^{n} b'_{k,k}(0) = \mathrm{Tr}(\dot{B}(0))$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{t \mapsto \det B(t) \text{ est dérivable en 0 de dérivée } \mathrm{Tr}(\dot{B}(0))}$

<u>ii) cas général</u> :

$$\frac{1}{(t-t_0)}\big(\det B(t) - \det B(t_0)\big) = \frac{1}{(t-t_0)}\det B(t_0)\big(\det((B(t_0)^{-1}B(t)) - \det(\mathbb{1})\big)$$

En posant $C(h) = (B(t_0))^{-1}.B(t_0 + h)$, on se ramène à la question précédente, d'où :

$(\det C)'(0) = \mathrm{Tr}(\dot{C}(0)) \Rightarrow (\det(B(t_0)^{-1}.B)'(t_0) = \mathrm{Tr}((B(t_0)^{-1}.\dot{B}(t_0)$

$\Rightarrow (\det B)'(t_0) = \det(B(t_0)).\det(B(t_0)^{-1}).\mathrm{Tr}((B(t_0)^{-1}.\dot{B}(t_0) = \mathrm{Tr}\left(B(t_0)^{-1}.\dot{B}(t_0)\right)$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{si } B(t_0) \text{ inversible } t \mapsto \det B(t) \text{ est dérivable en } t_0 \text{ de dérivée } \mathrm{Tr}\left(B(t_0)^{-1}.\dot{B}(t_0)\right)}$

4.b) • Si $\det L(t) \neq 0$, $\dot{\widehat{\det L(t)}} = \mathrm{Tr}(L^{-1}(t).\dot{L}(t)) = \mathrm{Tr}(L^{-1}.[L(t), M])$

$= \mathrm{Tr}(L^{-1}(t).L(t).M - L^{-1}(t).M.L(t)) = \mathrm{Tr}\,M - \underbrace{= \mathrm{Tr}(L^{-1}(t).M.L(t))}_{\mathrm{Tr}(M.L(t).L^{-1}(t))=\mathrm{Tr}(M)} = 0$

• Supposons qu'il existe $t \in I/\det L(t) = 0$ et $t < t_0$.

Soit $\alpha = \sup\{t \in I/\det L(t) = 0 \text{ et } t < t_0\}$. Par continuité de la fonction $\det L$, on a $\det L(\alpha) = 0$ et donc $\alpha < t_0$. Par définition de α, $\det L$ ne s'annule pas sur $]\alpha, t_0]$ et comme, d'après ce qui précède, $\dot{\widehat{\det L}}$ est nulle sur ce même intervalle, $\det L$ est constante égale à $\det L(t_0)$ sur $]\alpha, t_0] \Rightarrow \lim\limits_{t\to\alpha^+} \det L(t) = \det L(t_0) \neq 0 = \det L(\alpha) \Rightarrow \det L$ non continue en α (contradiction). D'où $\det L$ non nulle sur $]-\infty, t_0] \cap I$. De même, on prouve que $\det L$ non nulle sur $[t_0, +\infty[\cap I \Rightarrow \dot{\overbrace{\det L}}$ nulle sur $I \Rightarrow$ $\boxed{\det L \text{ constante égale à } \det L(t_0) \text{ sur } I}$

• En tous les points t en lesquels $\det(L(t) - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$, on a :

$\dot{\overbrace{\det(L - \lambda\mathbb{1})t}} = \mathrm{Tr}((L(t) - \lambda\mathbb{1})^{-1}.\dot{\overbrace{(L - \lambda\mathbb{1})}}(t)) = \mathrm{Tr}((L(t) - \lambda\mathbb{1})^{-1}.\dot{L}(t))$

Or $\dot{L}(t) = [L(t), M] = L(t).M - M.L(t) = (L(t).\lambda\mathbb{1}).M - M.(L(t) - \lambda\mathbb{1})$. En posant $B(t) = L(t) - \lambda\mathbb{1}$, on a :

$\dot{\overbrace{\det(L - \lambda\mathbb{1})t}} = \mathrm{Tr}\left((B(t))^{-1}.(B(t).M - M.B(t))\right) = \mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(B^{-1}MB(t)) = 0$

De la même façon que précédemment, si $\det(L(t_0) - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$ alors $t \mapsto \det(L(t) - \lambda\mathbb{1})$ ne s'annule pas sur I et si $t \mapsto \det(L(t) - \lambda\mathbb{1})$ s'annule en un point de I alors elle s'annule sur I tout entier.

4.c Soit $t_0 \in I$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(L(t_0))$ (où $\mathrm{Sp}(L(t_0))$ désigne le spectre de $L(t_0)$), on a :

$\det(L(t_0) - \lambda\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \forall t \in I,\ \det(L(t_0) - \lambda\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \forall t \in I,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(L(t))$

d'où $\forall (t, t_0) \in I^2,\ \mathrm{Sp}(L(t_0)) \subset \mathrm{Sp}(L(t)) \Rightarrow \forall (t, t_0) \in I^2,\ \mathrm{Sp}(L(t_0)) = \mathrm{Sp}(L(t))$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Le spectre de } L \text{ ne varie pas avec } t}$

5.a $L(0) = X$ et X possède n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

D'après la question **4.c**, $\forall t \in I$, $L(t)$ possède n valeurs propres réelles distinctes qui sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$\Rightarrow \forall t \in I,\ L(t)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n$ et est semblable dans $\mathcal{M}_n$ à la matrice $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tout comme la matrice X

$\Rightarrow \forall t \in I,\ L(t)$ et X sont semblables dans $\mathcal{M}_n$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{pour tout réel } t \text{ de } I, \text{ il existe une matrice } A(t) \text{ inversible telle que } L(t) = A(t)^{-1}.X.A(t)}$

<u>Il n'y a pas unicité</u> car si la matrice $A(t)$ convient alors la matrice $B(t) = 2.A(t)$ convient aussi.

5.b $L(t) = A(t)^{-1}.X.A(t) \Rightarrow \dot{L}(t) = \frac{d}{dt}\left(A(t)^{-1}.X.A(t)\right) = [A(t)^{-1}.X.A(t), A(t)^{-1}.\dot{A}(t)]$ d'après **2.b)**

$\Rightarrow [L(t), M] = [L(t), A(t)^{-1}.A(t)]$.

<u>conclusion</u> : $\boxed{A \text{ satisfait à l'équation différentielle } \begin{cases} A(0)^{-1}.X.A(0) = X \\ [A(t)^{-1}.X.A(t), M] = [A(t)^{-1}.X.A(t), A(t)^{-1}.\dot{A}(t)] \end{cases}}$

5.c Si $A(0) = \mathbb{1}$, on a bien $A(0)^{-1}.X.A(0) = X$

Si $\dot{A} = AM$ alors $A^{-1}.\dot{A} = M \Rightarrow [A^{-1}.X.A, M] = [A^{-1}.X.A, A^{-1}.\dot{A}]$.

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{toute solution du système} \begin{cases} \dot{A} = AM \\ A(0) = \mathbb{1} \end{cases} \text{ est solution de l'équation différentielle du } \mathbf{5.b}}$

• $\dot{A} = AM$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, d'après le théorème de Cauchy Lipschitz, il y a existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy $A(0) = \mathbb{1}$.

• Pour construire les solutions de (1), on commence par résoudre le système (2) pour trouver une solution $t \mapsto A(t)$, ce qui nous donnera $L : t \mapsto A(t)^{-1}.X.A(t)$ solution du système (1).

• <u>Si X n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes</u> ? ? ?

6 quand M est une matrice constante, d'après les préliminaires, $A : t \mapsto \exp(tM)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\dot{A} : t \mapsto \exp(tM).M$ et $A(0) = \mathbb{1}$ d'où $A : t \mapsto \exp(tM)$ est solution dans $\mathcal{M}_n$ de (2) et d'après **I.5.c**

$\boxed{L : t \mapsto \exp(-tM).X.\exp(tM) \text{ est la solution de (1).}}$

II.1.a On montre facilement que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n$ sont des parties non vides de $\mathcal{M}_n$ stables par combinaisons linéaires, ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$.

$\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$($\mathcal{A}_n$ admet les $E_{i,j} - E_{j,i}$ pour $i > j$ comme base où les $E_{i,j}$ forment la base canonique de $\mathcal{M}_n$)

$\dim \mathcal{T}_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$($\mathcal{A}_n$ admet les $(E_{i,j})_{j \leqslant i}$ comme base)

0 est la seule matrice à la fois triangulaire inférieure et antisymétrique d'où $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{T}_n = \{0\}$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{A}_n \cap \mathcal{T}_n = \{0\} \\ \dim \mathcal{A}_n + \dim \mathcal{T}_n = n^2 = \dim \mathcal{M}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{T}_n \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_n.$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\mathcal{A}_n \oplus \mathcal{T}_n = \mathcal{M}_n}$

II.1.b $(\forall M \in \mathrm{O}_n,\ {}^tM.M = \mathbb{1} \Rightarrow M \in GL_n) \Rightarrow \mathrm{O}_n \subset GL_n$

${}^t\mathbb{1}.\mathbb{1} = \mathbb{1}.\mathbb{1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} \in \mathrm{O}_n \Rightarrow \mathrm{O}_n$ partie non vide de GL_n.

Soit $(M_1, M_2) \in \mathrm{O}_n^2$, ${}^t(M_1.M_2^{-1}).(M_1M_2^{-1}) = {}^tM_2^{-1}.\underbrace{{}^tM_1.M_1}_{=\mathbb{1}}.M_2^{-1} = {}^tM_2^{-1}.M_2^{-1}$.

Or ${}^tM_2.M_2 = \mathbb{1} \Rightarrow M$ inversible et $M_2^{-1} = {}^tM_2$ d'où ${}^t(M_1.M_2^{-1}).(M_1M_2^{-1}) = \mathbb{1} \Rightarrow (M_1M_2^{-1}) \in \mathrm{O}_n$

<u>conclusion</u> : $\left.\begin{array}{c} \mathrm{O}_n \text{ partie non vide de } GL_n \\ \forall (M_1, M_2) \in \mathrm{O}_n^2,\ M_1.M_2^{-1} \in \mathrm{O}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{O}_n \text{ sous groupe de } (GL_n, \circ)}$

$(\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{P}_n,\ \det M = \prod_{i=1}^{n} m_{i,i} > 0 \Rightarrow M \in GL_n)$ d'où $\mathcal{P}_n \subset GL_n$

$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{P}_n$ et soit $M = M_1M_2 = (m_{i,j})$ $M_1 = m^1_{i,j}$, $M_2 = m^2_{i,j}$

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m^1_{i,k}.m^2_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} m^1_{i,k}.m^2_{k,j} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{m^1_{i,k}}_{=0} m^2_{k,j}$$

Or $m_{k,j} = 0$ si $j > k$ d'où $m_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} = 0 \text{ si } j > i \\ = m^1_{i,i}.m^2_{i,i} \text{ si } i = j (*) \\ = \displaystyle\sum_{k=j}^{i} m^1_{i,k}.m^2_{k,j} \text{ si } j < i \end{array}\right\} \Rightarrow M_1.M_2 \in \mathcal{P}_n$ ($\mathcal{P}_n$ est stable par produit.)

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de M est un polynôme annulateur de M (de plus $a_0 = \det M$).

$P(M) = 0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k M^k + \det M \mathbb{1} \Rightarrow M.\left(\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}\right) = -\det M \mathbb{1} \Rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{\det M}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}\right) \Rightarrow$
M^{-1} est une matrice triangulaire inférieure comme combinaisons linéaires de matrices triangulaires inférieures.

Si $M = (m_{i,j})$ et $M^{-1} = (m'_{i,j})$ d'après $(*)$ $\forall i,\ m_{i,i}.m'_{i,i} = 1 \Rightarrow m'_{i,i} = \dfrac{1}{m_{i,i}} > 0 \Rightarrow M^{-1} \in \mathcal{P}_n$

<u>conclusion</u> : $\left.\begin{array}{c} \mathcal{P}_n \text{ partie non vide de } GL_n \\ \forall (M_1, M_2) \in \mathcal{P}_n^2,\ M_1.M_2 \in \mathcal{P}_n \text{ et } M_1^{-1} \in \mathcal{P}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_n \text{ sous groupe de } (GL_n, \circ)}$

II.1.c Soit $A \in \mathcal{A}_n$, ${}^t(\exp(M)) = {}^t\left(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k\right)$ Or $M \mapsto {}^tM$ étant linéaire donc continue car nous sommes en dimension finie : ${}^t\left(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k\right) = \lim_{n\to+\infty} {}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, {}^t\!\left(M^k\right)$

$= \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left({}^tM^k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (-M)^k = \exp(-M) = (\exp M)^{-1}$

$\Rightarrow {}^t(\exp M) = (\exp M)^{-1} \Rightarrow \exp M \in \mathrm{O}_n$ <u>conclusion</u> : $\boxed{\forall M \in \mathcal{A}_n,\ \exp M \in \mathrm{O}_n}$

Soit $M \in \mathcal{T}_n$, $\mathcal{T}_n$ étant stable par produit, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k \in \mathcal{T}_n$ (de plus $M^0 = \mathbb{1} \in \mathcal{T}_n$).

Si M est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors M^k est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

$$\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_n$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall M \in \mathcal{T}_n,\ \exp M \in \mathcal{P}_n}$

1.d $\forall t \in I,\ R(t) \in \mathrm{O}_n \Rightarrow \forall t \in I,\ {}^tR(t).R(t) = \mathbb{1} \Rightarrow \forall t \in I,\ \dot{\widehat{{}^tR}}\,(t).R(t) + {}^tR(t).\dot{R}(t) = 0$

Or, par linéarité de la transposition $\dot{\widehat{{}^tR}}\,(t) = {}^t\dot{R}(t)$, d'où

$\forall t \in I,\ {}^t({}^tR(t).\dot{R}(t)) = -\,{}^tR(t).\dot{R}(t) \Rightarrow \forall t \in I,\ {}^t(R(t)^{-1}.\dot{R}(t)) = -R(t)^{-1}.\dot{R}(t)$ car ${}^tR(t) = R(t)^{-1}$

$\Rightarrow \forall t \in I,\ R(t)^{-1}.\dot{R}(t) \in \mathcal{A}_n$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Si } R : I \to \mathrm{O}_n \text{ de classe } C^1 \text{ alors } R^{-1}.\dot{R} \text{ à valeurs dans } \mathcal{A}_n}$

$\forall t \in I,\ T(t) \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \forall t \in I,\ T(t)$ est inversible et $T(t)^{-1} \in \mathcal{P}_n$ (car $\mathcal{P}_n$ sous-groupe de GL_n)

De plus, si $T(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, on a : $\forall t \in I,\ \forall i,j,\ i < j \Rightarrow a_{i,j}(t) = 0 \Rightarrow \dot{a}_{i,j}(t) = 0$ d'où $\dot{T}(t) \in \mathcal{T}_n$

$T(t) \in \mathcal{P}_n$ et $\dot{T}(t) \in \mathcal{T}_n \Rightarrow T(t)^{-1}.\dot{T}(t) \in \mathcal{T}_n$ ($\mathcal{P}_n \subset \mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n$ stable par produit).

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Si } T : I \to \mathcal{P}_n \text{ de classe } C^1 \text{ alors } T^{-1}.\dot{T} \text{ à valeurs dans } \mathcal{T}_n}$

2.a Soit $B \in GL_n$. Soit $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de B.

B étant inversible $(C_n, \ldots, C_1)$ est une base $\mathbb{R}^n$. En considérant $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, on applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour trouver une base orthonormale $(C_n^R, \ldots, C_1^R)$ qui vérifie $\begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!] & \mathrm{Vect}(C_{n-k}, \ldots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_{n-k}^R, \ldots, C_n^R) \\ & (C_k \mid C_k^R) > 0 \end{cases}$.

Si on note $T_k = \begin{pmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{n,k} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de C_k dans la base $(C_1^R, \ldots, C_n^R)$.

Comme $C_k \in \mathrm{Vect}(C_k^R, \ldots, C_n^R)$, on a : $t_{1,k} = t_{2,k} = \ldots = t_{k-1,k} = 0$ ceci pour tout k de $[\![1,n]\!]$ d'où la matrice T dont les vecteurs colonnes sont les T_k appartient à $\mathcal{T}_n$ et comme pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$ $(C_k \mid C_k^R) > 0$ on a $t_{k,k} > 0$ ce qui nous donne $T \in \mathcal{P}_n$.

R la matrice dont les vecteurs colonnes sont les C_k^R est orthogonale car les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

En représentant les matrices par leurs colonnes ou leurs coefficients il vient :

$$R.T = (C_1^R, \ldots, C_n^R).(t_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} = \left(\sum_{i=1}^n t_{i,1}C_i^R, \sum_{i=1}^n t_{i,2}C_i^R, \ldots, \sum_{i=1}^n t_{i,n}C_i^R\right) = (C_1, \ldots, C_n) = B.$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall B \in GL_n,\ \exists R \in \mathrm{O}_n,\ \exists T \in \mathcal{P}_n \mid B = RT}$

2.b <u>unicité de la décomposition</u>

Soit $B \in GL_n$, soit $(R_1, R_2) \in \mathrm{O}_n^2$ et $(T_1, T_2) \in \mathcal{P}_n^2 / B = R_1T_1 = R_2T_2$.

On a donc $\underbrace{R_2^{-1}R_1}_{\in \mathrm{O}_n} = \underbrace{T_2.T_1^{-1}}_{\in \mathcal{P}_n} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ d'après **II.1.b**.

Si on note $C_1,\dots,C_n$ les vecteurs colonnes de $R_2^{-1}.R_1 (= T_2.T_1^{-1})$ qui est triangulaire inférieure.

$(C_n \mid C_n) = 1 = a_{n,n}^2 \Rightarrow |a_n| \Rightarrow a_{n,n} = 1$ car $R_2^{-1}.R_1 \in \mathcal{P}_n$

$\left.\begin{array}{r}(C_{n-1} \mid C_{n-1}) = 1\\ (C_{n-1} \mid C_n) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{n-1,n-1}^2 + a_{n,n-1}^2 = 1\\ a_{n,n-1} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{n-1,n-1}^2 = 1\\ a_{n,n-1} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{n-1,n-1} = 1\\ a_{n,n-1} = 0\end{array}\right\}$ car $a_{n-1,n-1} > 0$

On montre en réitérant le procédé que :

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_{k,k} = 1$ et $\forall i,j,\ i \neq j\ a_{i,j} = 0$ soit $R_2^{-1}.R_1 = \mathbb{1} \Rightarrow R_2 = R_1$ et $T_2 = T_1$.

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Il y a unicité de la décomposition du } \textbf{II.2.a)}}$

2.c Si on note $(C_1^R(t),\dots,C_n^R(t))$ les vecteurs colonnes de $R(t)$, nous avons vu qu'ils sont obtenus à partir du procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir des vecteurs colonnes $(C_1(t),\dots,C_n(t))$ de $B(t)$. Ainsi

$$C_n^R(t) = \frac{1}{\|C_n(t)\|}.C_n(t) \text{ et récursivement } C_k^R(t) = \frac{C_k(t) - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} (C_i^R(t) \mid C_k(t))C_i^R(t)}{\left\| C_k(t) - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} (C_i^R(t) \mid C_k(t)).C_i^R(t)\right\|}$$

$t \mapsto C_n(t)$ étant de classe C^1 et ne s'annulant pas sur I on a : $C_n^R : t \mapsto \dfrac{1}{\|C_n(t)\|}.C_n(t)$ de classe C^1 sur I.

Puis récursivement, on démontre que $D_k : t \mapsto C_k(t) - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} (C_i^R(t) \mid C_k(t)).C_i^R(t)$ est de classe C^1 sur I comme somme de produits de fonction de classe C^1 et ne s'annule pas sur I car $C_k(t) \notin \mathrm{Vect}(C_{k+1}^R(t),\dots,C_n^R(t))$ d'où $C_k^R : t \mapsto \dfrac{1}{\|D_k(t)\|}D_k(t)$ est de classe C^1 sur $I \Rightarrow \boxed{t \mapsto R(t) \text{ est } C^1 \text{ sur } I}$.

$\Rightarrow t \mapsto (R(t))^{-1}$ est C^1 sur I d'après **I.2.a** $\Rightarrow t \mapsto T(t) = (R(t))^{-1}.B(t)$ est C^1 sur I (les coefficients de $T(t)$ s'expriment comme des sommes de produits des coefficients de $R(t)^{-1}$ et de $B(t)$.

<u>conclusion</u> : $\boxed{t \mapsto T(t) \text{ est } C^1 \text{ sur } I}$

3.a $\left\{\begin{array}{l}\dot{L} = [L, \pi_1(L)]\\ L(0) = X\end{array}\right.$ avec $L = A(t)^{-1}.X.A(t) \Rightarrow \dfrac{d}{\mathrm{d}t}(A(t)^{-1}.X.A(t)) = [A(t)^{-1}.X.A(t), A(t)^{-1}.\dot{A}(t)] = [L, \pi_1(L)] = [A(t)^{-1}.X.A(t), \pi_1(L)]$

Si $\left\{\begin{array}{l} A^{-1}.\dot{A} = \pi_1(L)\\ A(0) = \mathbb{1}\end{array}\right\}$ alors $L = A^{-1}.X.A$ satisfait à (3).

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{L'équation différentielle cherchée est : } \left\{\begin{array}{l}\dot{A} = A.\pi_1(A^{-1}.X.A)\\ A(0) = \mathbb{1}\end{array}\right.}$

3.b posons $X_1 = \pi_1(X)$ et $X_2 = \pi_2(X)$ (on a $X = X_1 + X_2$)

<u>si X_1 et X_2 commutent</u> : on peut montrer que : $\exp(tX) = \exp(tX_1 + tX_2) = \exp(tX_1).\exp(tX_2)$

or $\left.\begin{array}{l} X_1 \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \forall t \in I,\ tX_1 \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \forall t \in I,\ \exp(tX_1) \in \mathrm{O}_n\\ X_2 \in \mathcal{T}_n \Rightarrow \forall t \in I,\ tX_2 \in \mathcal{T}_n \Rightarrow \forall t \in I,\ \exp(tX_2) \in \mathcal{P}_n\end{array}\right\} \Rightarrow \Pi_1(\exp(tX)) = \exp(tX_1) = \exp(t\pi_1(X))$

$\Rightarrow A(t) = \exp(tX_1) \Rightarrow \dot{A}(t) = \exp(tX_1).X_1 \Rightarrow A(t)^{-1}.X.A(t) = \exp(-tX_1)(X_1 + X_2).\exp(tX_1)$

Or comme X_1 et X_2 commutent, on peut montrer que $\exp(tX_1)$ et X_2 commutent d'où :

$A(t)^{-1}.X.A(t) = X \Rightarrow \pi_1(A(t)^{-1}.X.A(t)) = \pi_1(X) = X_1$. On a bien A solution de $\dot{A} = A.\pi_1(A^{-1}.X.A)$. De plus $A(0) = \Pi_1(\exp(0)) = \Pi_1(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ car $\mathbb{1} = \mathbb{1}.\mathbb{1}$ avec $\mathbb{1} \in \mathrm{O}_n$ et $\mathbb{1} \in \mathcal{P}_n$.

<u>si X_1 et X_2 ne commutent pas</u> : ? ? ? ? ?

III.1 On considère :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) & \longmapsto & (-2e^{2(y_1-y_2)}, -2e^{2(y_2-y_3)}+2e^{2(y_1-y_2)},\ldots,2e^{2(y_{n-1}-y_n)},x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, on cherche à résoudre l'équation différentielle du premier ordre $\dot{X} = f(X)$ et

$$X(0) = \begin{pmatrix} \bar{p_1} \\ \vdots \\ \bar{p_n} \\ \bar{q_1} \\ \vdots \\ \bar{q_n} \end{pmatrix}.$$

f étant définie continue sur $\mathbb{R}^{2n}$, les conditions d'applications du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites, donc on a l'existence et l'unicité d'une solution locale à notre problème.

conclusion : $\boxed{\exists\varepsilon,\ \exists X :]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathbb{R}^{2n} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall t\in]\varepsilon,\varepsilon[,\ \dot{X}=f(X(t)) \text{ et } X(0) = \begin{pmatrix} \bar{p_1} \\ \vdots \\ \bar{p_n} \\ \bar{q_1} \\ \vdots \\ \bar{q_n} \end{pmatrix}}$

III.2 $H(q(t),p(t)) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))}$

$$= \frac{d(H(tq(t),p(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2p_I(t)\dot{p_i}(t) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(2\dot{q_i}(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} - 2\dot{q_{i+1}}(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t)}\right)$$

$$= p_1(t)(-2e^{2(q_1(t)-q_2(t)}) + \sum_{i=2}^{n-1} p_i(t)\left(-2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))}\right) + p_n(t)(-2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t)})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\left(2p_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} - 2p_{i+1}(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))}\right)$$

$$= 2\sum_{i=2}^{n} p_i(t)e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} - 2\sum_{i=1}^{n-1} p_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2\sum_{i=1}^{n-1} p_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} - 2\sum_{i=2}^{n} p_i(t)e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))}$$

$= 0 \Rightarrow t \mapsto H(q(t),p(t))$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I

$\Rightarrow \boxed{t \mapsto H(q(t),p(t)) \text{ est constante sur } I}$.

III.3 $\dfrac{d}{\mathrm{d}t}(P(q(t),p(t)) = \sum_{i=1}^{n}\dot{p_i}(t) = -2e^{2(q_1(t)-q_2(t))} + \sum_{i=2}^{n-1}\left(-2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))}\right) + 2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))}$

$$= -2e^{2(q_1(t)-q_2(t))} + \sum_{i=2}^{n-1} -2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + + \sum_{i=2}^{n-1} 2e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} + 2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} -2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + + \sum_{i=1}^{n-2} 2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P : (q,p) \mapsto \sum_{i=1}^{n} p_i \text{ est une intégrale première}}$$

III.4 Soit $R : t \mapsto Q(q(t),p(t)) - tP(q(t),p(t))$.

On a $R'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(t) - P(q(t),p(t)) - t\,\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\big(P(q(t),p(t))\big)}_{=0 \text{ d'après III.3}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(t) - \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{t \mapsto Q(q(t),p(t)) - tP(q(t),p(t)) \text{ est une fonction constante sur } I}$$

III.5 On remarque que $L = M + (L-M)$ avec $L \in \mathcal{A}_n$ et $(L-M) \in \mathcal{P}_n$. On a donc $\pi_1(L) = M \Rightarrow [L, \pi_1(L)] = LM - ML = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

On a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k}m_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}l_{k,j}$ et

$$\dot{L} = (\dot{l_{i,j}}) \text{ avec } \dot{l_{i,j}} = \left\{\begin{array}{ll} \dot{p_i} & \text{si } i=j \\ (\dot{q_i} - \dot{q_{i+1}})e^{q_i - q_{i+1}} & \text{si} j = i+1 \\ (\dot{q_j} - \dot{q_{j+1}})e^{q_j - q_{j+1}} & \text{si} i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -2e^{2(q_1-q_2)} & \text{si } i=j=1 \\ -2e^{2(q_i-q_{i+1})} + 2e^{2(q_{i-1}-q_i)} & \text{si } i=j \text{ et } 1<i<n \\ -2e^{2(q_{n-1}-q_n)} & \text{si } i=j=n \\ (p_i - p_{i+1})e^{q_i-q_{i+1}} & \text{si} j=i+1 \\ (p_j - p_{j+1})e^{q_j-q_{j+1}} & \text{si} i=j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

On vérifie par le calcul que $\dot{L} = LM - ML = [L, \pi_1(L)]$ et donc que L satisfait une équation de Lax de type (3). Ici $L(0) = X = \begin{pmatrix} \overline{p_1} & e^{\overline{q_1}-\overline{q_2}} & & & \\ e^{\overline{q_1}-\overline{q_2}} & \overline{p_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & & \overline{p_{n-1}} & e^{\overline{q_{n-1}}-\overline{q_n}} \\ & & & e^{\overline{q_{n-1}}-\overline{q_n}} & \overline{p_n} \end{pmatrix}$