Corrigé X - E.N.S. 2002 - (Maths - PSI)

François Jaboeuf - PSI* - Lycée Joffre-Montpellier

7 juillet 2002

Remarques préliminaires :

Tout d'abord l'énoncé définit un produit scalaire hermitien $(\cdot|\cdot)$ qui n'est en fait que positif et non défini-positif sur l'espace E_0 car la stricte-positivité des intégrales de fonctions continues n'est plus vérifiée pour les fonctions seulement continues par morceaux. Pour la même raison les applications $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ ne sont que des semi-normes sur E_0. Par contre les définitions restreintes à l'espace F_0 seraient correctes.

Rappelons enfin un résultat du cours, utile dans ce problème, concernant les fonctions continues par morceaux et T-périodiques :

$$\forall f \in E_0,\ \forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \tag{1}$$

Nous noterons dans tout ce problème $\boxed{(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$ la famille orthonormale de l'espace hermitien F_0 des fonctions : e_n : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\frac{2in\pi t}{T}} \end{array}\right.$.

PARTIE I

Question N° I.1

Soit x_0 un réel, et on suppose que g est continue à gauche en x_0. Ceci entraine pout tout réel $\varepsilon > 0$ l'existence d'un réel $\alpha \in]0, T[$, tel que :

$$\boxed{\forall u \in [x_0-\alpha, x_0],\ g(x_0)-\varepsilon \leq g(u) \leq g(x_0)+\varepsilon}$$

Soit alors la fonction f positive de E_0 définie par sa restriction à $[0, T[$:

$\forall t \in [0, T[, \quad \begin{cases} f(t) = 1 & \text{Si } 0 \leq t \leq \alpha \\ f(t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$. On a donc compte-tenu de l'hypothèse de positivité de A_g :

$$0 \leq A_g f(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x_0-t)f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^\alpha g(x_0-t)\,dt \leq \frac{\alpha}{T}(g(x_0)+\varepsilon)$$

On obtient ainsi pour tout $\varepsilon > 0,\ g(x_0)+\varepsilon \geq 0$ et donc que $\boxed{g(x_0) \geq 0}$.

Le cas de la continuité à droite se traite de manière similaire en écrivant, compte-tenu de (1) : $A_g f(x_0) = \frac{1}{T}\int_{-T}^0 g(x_0-t)f(t)\,dt$, avec cette fois : $\forall t \in]-T, 0]$, $\begin{cases} f(t) = 1 & \text{Si } -\alpha \leq t \leq 0 \\ f(t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$.

Le résultat obtenu est donc valable pour tous les réels x_0, d'où la positivité de g.

Question N° I.2

Le changement de variable affine $t = x-u$ dans l'intégrale combiné à la propriété (1) conduit directement au résultat :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A_g f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x-t)f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{x-T}^x g(u)f(x-u)\,du = \frac{1}{T}\int_0^T g(u)f(x-u)\,du = A_f g(x)$$

D'où $\boxed{A_g f = A_f g}$.

Question N° I.3

I.3.1 D'après I.2 puis par le changement de variable affine $t = x - u$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A_{g_0}f(x) = A_f g_0(x) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x-t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{x-\frac{T}{2}}^{x} f(u)\,du = \boxed{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x-\frac{T}{2})}$$

I.3.2 La T-périodicité de g montre clairement que $A_g f$, par sa définition intégrale, est toujours T-périodique.

La continuité de $A_{g_0}f$ résulte du résultat précédent I.3.1 car $\tilde{f}$, comme primitive d'une fonction continue par morceaux ($\frac{1}{T}f$) sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$. Finalement $\boxed{A_{g_0}f \in F_0}$.

Question N° I.4

On a déja vu que $A_g f$, par sa définition intégrale, est bien T-périodique.

La démonstration suivante de la continuité comporte 3 étapes :

1. 1ère étape : Généralisation du I.3.2
   Considérons un segment $[a,b]$ inclus dans $[0,T]$ et g la fonction de E_0 coïncidant avec la fonction caractéristique de $]a,b[$ sur $[0,T]$ (g(t) vaut 1 sur $]a,b[$ et 0 sur $[0,T]\setminus]a,b[$). Un calcul similaire au I.3.1 donne :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ A_g f(x) = A_f g(x) = \frac{1}{T}\int_a^b f(x-t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{x-b}^{x-a} f(u)\,du = \tilde{f}(x-a) - \tilde{f}(x-b)$$

   Ainsi $A_g f$ est, de même qu'au I.3.2, dans F_0.
2. 2ème étape : Cas des fonctions g de E_0 en escalier sur $[0,T]$
   Ce sont des combinaisons linéaires de fonctions du type précédent et de fonctions de E_0 caractéristiques de singletons dans $[0,T]$ qui n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale définissant $A_g f$.
   Or la linéarité de l'intégrale et la bilinéarité du produit des fonctions montrent que l'opérateur $A_f\ : h \mapsto A_f h = A_h f$ est linéaire et donc $A_g f$ est ici continue comme combinaison linéaire de fonctions continues d'après le 1).
3. 3ème étape : Cas des fonctions g de E_0
   On sait qu'une telle fonction g est limite uniforme (sur le segment $[0,T]$ mais aussi sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité) d'une suite de fonctions de E_0 en escalier sur $[0,T]$: $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après l'étape précédente les fonctions $A_{g_n}f$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ et il ne reste plus qu'à vérifier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$ vers $A_g f$ pour assurer la continuité de la fonction $A_g f$ sur $\mathbb{R}$:

   $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad |A_g f(x) - A_{g_n}f(x)| = |\frac{1}{T}\int_0^T (g(x-t) - g_n(x-t))\,f(t)\,dt| \leq \|g-g_n\|_\infty \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,dt$$

   D'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\|g-g_n\|_\infty) = 0$ et

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \|A_g f - A_{g_n}f\|_\infty \leq \|g-g_n\|_\infty \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,dt}.$$

Question N° I.5

I.5.1 La T-périodicité étant acquise (cf. I.3.1), Il faut montrer que $A_g f$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, dès que g est C^k et f C^0. L'application polynômiale $(x,t) \mapsto (x-t)$ est continue (et C^∞) sur $\mathbb{R}^2$ et d'après la conservation de la continuité par composition et produit, la fonction : $h : (x,t) \mapsto g(x-t)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; il en est de même, pour tout t dans $\mathbb{R}$, pour la classe C^k de l'application partielle : $x \mapsto g(x-t)f(t)$ et pour la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles $(x,t) \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = g^{(p)}(x-t)f(t)$ (pour $0 \leq p \leq k$).

Le théorème de dérivation C^k (ou de continuité si k=0) sous l'intégrale s'applique donc et prouve que $A_g f$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ avec de plus : $\boxed{(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, (A_g f)^{(k)}(x) = A_{g^{(k)}}f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g^{(k)}(x-t)f(t)\,dt}$

I.5.2 Prenons f dans F_ℓ et g dans F_k donc dans F_0 ; on peut utiliser le I.5.1 en échangeant les rôles de f et de g : $A_f g$ est dans F_ℓ et même $(A_f g)^{(\ell)} = A_{f^{(\ell)}}g$, mais compte-tenu de la symétrie établie au I.2 entre f et g on peut écrire :

$$(A_g f)^{(\ell)} = (A_f g)^{(\ell)} = A_{f^{(\ell)}}g = A_g f^{(\ell)}$$

et comme $f^{(\ell)} \in F_0$ et $g \in F_k$ on peut réappliquer le I.5.1 à $A_g f^{(\ell)}$ qui est donc de classe C^k avec $(A_g f^{(\ell)})^{(k)} = A_{g^{(k)}}f^{(\ell)}$.

Finalement, la T-périodicité étant acquise (cf. I.3.1), on a bien : $\boxed{A_f g \in F_{k+\ell} \text{ avec } (A_g f)^{(k+\ell)} = A_{g^{(k)}} f^{(\ell)}}$.

Question N° I.6

Le théorème de Fubini (du programme) conduit rapidement au résultat demandé mais seulement pour des fonctions continues donc dans F_0 :

$$c_n(A_g f) = \frac{1}{T}\int_0^T A_g f(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt = \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T g(t-u)f(u)\,du\right) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt =$$

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T f(u)\left(\int_0^T g(t-u)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt\right)du$$

Puis par le changement de variable affine ($t = u + v$) dans la deuxième intégrale et compte-tenu de (1) :

$$c_n(A_g f) = \frac{1}{T^2}\int_0^T f(u)\left(\int_{-u}^{T-u} g(v)e^{-\frac{2i\pi n(u+v)}{T}}\,dv\right)du = \frac{1}{T^2}\left(\int_0^T f(u)e^{-\frac{2i\pi nu}{T}}\,du\right)\left(\int_0^T g(v)e^{-\frac{2i\pi nv}{T}}\,dv\right)$$

Soit $\boxed{c_n(A_g f) = c_n(f)c_n(g)}$.

Mais donnons maintenant une démonstration valable dans le cadre des fonctions seulement dans E_0 et analogue au raisonnement du I.4 en 3 étapes (ici f est fixée dans E_0) :

1. 1ère étape : Cas où $g_{/[0,T]}$ est une fonction caractéristique d'un sous-intervalle de $[0,T]$
   Considérons un segment $[a,b]$ inclus dans $[0,T]$ et g la fonction de E_0 coïncidant avec la fonction caractéristique de $]a,b[$ sur $[0,T]$, alors comme au I.4 : $A_g f(t) = \tilde{f}(t-a) - \tilde{f}(t-b)$, ce qui prouve que $A_g f$ est C^1 par morceaux et C^0, d'où par intégration par parties classique dans le coefficient de Fourier $c_n(A_g f)$ on obtient (la partie intégrée est nulle par T-périodicité) :

   $$c_n(A_g f) = \frac{1}{T}\int_0^T A_g f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt = \frac{-1}{2in\pi}\left(\left[A_g f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right]_0^T - \int_0^T (A_g f)'(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt\right) =$$

   $$\frac{1}{2in\pi T}\left(\int_0^T f(t-a)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt - \int_0^T f(t-b)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt\right)$$

   Et par les changements de variable affines respectifs (t=a+u, t=b+u) :

   $$c_n(A_g f) = \frac{1}{2in\pi}\left(c_n(f)e^{-\frac{2i\pi na}{T}} - c_n(f)e^{-\frac{2i\pi nb}{T}}\right) = c_n(f)\frac{1}{2in\pi}\left(e^{-\frac{2i\pi na}{T}} - e^{-\frac{2i\pi nb}{T}}\right)$$

   Il ne reste plus qu'à prouver, ce qui est immédiat, que $c_n(g) = \frac{1}{2in\pi}\left(e^{-\frac{2i\pi na}{T}} - e^{-\frac{2i\pi nb}{T}}\right)$ pour avoir le résultat cherché dans ce cas :

   $$c_n(g) = \frac{1}{T}\int_a^b e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt = \frac{-1}{2in\pi}\left(e^{-\frac{2i\pi nb}{T}} - e^{-\frac{2i\pi na}{T}}\right)$$

2. 2ème étape : Cas des fonctions g de E_0 en escalier sur $[0,T]$
   Ce sont des combinaisons linéaires de fonctions du type précédent et de fonctions de E_0 caractéristiques de singletons dans $[0,T]$ qui n'interviennent pas dans le calcul des intégrales définissant $A_g f$, $c_n(A_g f)$, $c_n(g)$.
   Par linéarité de l'intégrale, $c_n(A_g f)$ et $c_n(g)$ dépendent linéairement de g donc l'égalité déduite de l'étape 1 :
   $\boxed{c_n(A_g f) = c_n(f)c_n(g)}$ se conserve ici.
3. 3ème étape : Cas des fonctions g de E_0
   On sait qu'une telle fonction g est limite uniforme (sur le segment $[0,T]$ mais aussi sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité) d'une suite de fonctions de E_0 : $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[0,T]$. D'après I.4 la suite des fonctions $A_{g_p} f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $A_g f$ et donc la convergence des suites de fonctions (de t) $\left(g_p(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(A_{g_p} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est également uniforme sur $\mathbb{R}$ vers respectivement $g(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}$ et $A_g f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}$ puisque :

   $$\|g(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} - g_p(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\|_\infty = \|g - g_p\|_\infty \text{ et } \|A_g f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} - A_{g_p} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\|_\infty = \|A_g f - A_{g_p} f\|_\infty$$

Ainsi on peut permuter les intégrales et les limites , soit :

$$\lim_{p\to+\infty}(c_n(g_p)) = c_n(g) \text{ et } \lim_{p\to+\infty}(c_n(A_{g_p}f)) = c_n(A_g f)$$

Finalement par passage à la limite dans l'égalité du 2) pour les fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ on a bien

$$\boxed{c_n(A_g f) = c_n(f)c_n(g)}$$

Question N° I.7

I.7.1 On sait d'après le cours que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n(g) = 0$ et donc que pour $|n| \geq N,\ |c_n(g)| \leq \frac{1}{2}|\lambda|$ (puisque $\lambda \neq 0$). On ne peut donc pas avoir $c_n(g) = \lambda$ pour $|n| \geq N$, ce qui assure : $\boxed{Card\{n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \lambda\} \text{ est fini}}$.

I.7.2 Remarquons d'abord que si f est dans $\ker(A_g - \lambda I_{E_0})$ alors, λ étant non nul, f est dans l'image de A_g et donc d'après I.4 dans F_0. Or dans cet espace l'application $f \mapsto \hat{f} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective (*d'après l'égalité de Parseval, justement parce que dans cet espace l'application* $\|\cdot\|_2$ *est une norme et non une semi-norme comme dans l'espace* E_0*- cf. les remarques du début*). Ainsi et compte-tenu du I.6. :

$$A_g(f) = \lambda f \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(A_g f) = \lambda c_n(f)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g)c_n(f) = \lambda c_n(f))$$
$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } c_n(g) \neq \lambda, c_n(f) = 0)$$

D'après I.7.1 la condition $c_n(g) \neq \lambda$ est assurée dès que $|n| \geq N$ et ainsi les sommes partielles $S_n(f)$ de la série de Fourier de F sont stationnaires à partir du rang N. Notons : $h = S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k$ (cf. les notations introduites dans les remarques préliminaires) ; les deux fonctions f et h, dans l'espace F_0, ont par construction les mêmes coefficients de Fourier ($c_k(f)$ pour $|k| \leq N$ et 0 pour $|k| > N$) et sont égales d'après l'injectivité vue ci-dessus(la réciproque étant immédiate). Ceci assure :

$$\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) \subset Vect\left((e_k)_{(-N\leq k\leq N)}\right) \text{ et donc } \dim(\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) \leq 2N+1$$

De manière plus précise notons $\boxed{\mathcal{E}_\lambda(g) = \{n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \lambda\}}$, ensemble fini (éventuellement vide) d'après I.7.1. D'après ci-dessus :

$$\boxed{\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) = \begin{cases} Vect(e_k)_{k\in\mathcal{E}_\lambda(g)} & \text{Si } \mathcal{E}_\lambda(g) \neq \emptyset \\ \{0\} & \text{Sinon} \end{cases} \text{ et donc } \dim(\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) = Card(\mathcal{E}_\lambda(g))}$$

En particulier on peut remarquer que tous les vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des vecteurs propres de A_g vérifiant : $\boxed{A_g(e_n) = c_n(g)e_n}$.

I.7.3 $\ker(A_g|V - \lambda I_V) = V \cap \ker(A_g - \lambda I_{E_0})$, donc compte-tenu du I.7.2 les seules valeurs propres non nulles possibles pour $A_g|V$ sont dans $\{c_n(g) \neq 0;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et en nombre fini. $A_g|V$ est diagonalisable si et seulement si V est la somme directe des sous-espaces propres, soit :

$$\boxed{V = (\ker(A_g) \cap V) \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) \cap V)\ , \text{ où } \Lambda = Sp(A_g|V) \cap \mathbb{C}^* \text{ est une partie finie de } \{c_n(g) \neq 0;\ n \in \mathbb{Z}\}}$$

(si $A_g|V$ est injective, $\ker(A_g) \cap V = \{0\}$ mais la formule reste valable, de même si $\Lambda = \emptyset$)

Compte-tenu du I.7.2,

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) \cap V) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(Vect(e_k,\ k \in \mathcal{E}_\lambda(g)) \cap V)$$

et donc $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(\ker(A_g - \lambda I_{E_0}) \cap V)$ est une somme directe de sous-espaces vectoriels H_λ de $Vect(e_k,\ k \in \mathcal{E}_\lambda(g))$ pour λ parcourant un sous-ensemble fini de $\{c_n(g) \neq 0;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Pour ce qui est du noyau de A_g, puisque d'après I.4, $A_g f$ est une fonction de F_0 : $A_g f = 0 \Leftrightarrow [\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(A_g f) = 0]$ donc d'après I.6, $\ker(A_g) = \{f \in E_0;\ (c_n(f) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } c_n(g) \neq 0)\}$ et $\ker(A_g) \cap V$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\ker(A_g)$.

Réciproquement prenons pour V un sous-espace vectoriel de E_0 de la forme :

$$V = G \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\Omega} H_\lambda\right)$$

où G est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\{f \in E_0;\ (c_n(f) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ tels que $c_n(g) \neq 0)\}$ et où H_λ est un sous-espace vectoriel de $Vect(e_k,\ k \in \mathcal{E}_\lambda(g))$ et Ω une partie finie de $\{n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) \neq 0\}$. V est bien de dimension finie et stable par A_g dont la restriction à V est diagonalisable car tous les vecteurs(non nuls) de G sont dans le noyau de A_g donc propres ainsi que ceux des espaces H_λ.

Question N° I.8

L'injectivité de A_g nécessite que $(\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) \neq 0)$ sinon, pour un n tel que $c_n(g) = 0$, le vecteur non nul e_n serait dans $\ker(A_g)$ (cf. I.7.2). Réciproquement d'après ci-dessus, pour un tel g, $\ker(A_g|F_0) = \{f \in F_0;\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = 0\} = \{0\}$ d'après l'injectivité dans F_0 de $f \mapsto \hat{f} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, . Soit donc un tel g dans F_0, cherchons s'il peut exister f dans F_0 telle que $A_g f = g$ ce qui implique d'après I.6 (et même équivaut à), : $(\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f)c_n(g) = c_n(g))$ soit puisqu'aucun $c_n(g)$ n'est nul : $(\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = 1)$. Ceci est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$ et une telle application A_g n'est pas surjective sur F_0. Il ne peut donc pas exister un g dans F_0 pour lequel l'application A_g induise une bijection de F_0 sur F_0.

Question N° I.9

L'inégalité de Bessel-Parseval pour les fonctions de E_0 montre que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ |c_n(g)| \leq \|g\|_2$ et prouve l'existence de $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|$ qui est atteint pour au moins un indice n_0 puisque $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n(g) = 0$ (Si $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)| \neq 0$, pour $|n| > N, |c_n(g)| \leq \frac{1}{2}\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|$ donc $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)| = \max\limits_{|n|\leq N}|c_n(g)|$ et sinon tous les $c_n(g)$ sont nuls). L'égalité de Parseval pour $A_g f$ s'écrit, compte-tenu du I.6 :

$$\|A_g f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 |c_n(f)|^2$$

d'où :

$$\|A_g f\|_2^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|^2 \|f\|_2^2$$

Pour tout f de E_0 tel que $\|f\|_2 = 1$, on obtient l'inégalité $\|A_g f\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|$ et de plus ce majorant est atteint pour, par exemple, $f = e_{n_0}$ car $\|e_{n_0}\|_2 = 1$ et (cf. I.7.2) $A_g e_{n_0} = c_{n_0}(g)e_{n_0}$ d'où $\|A_g e_{n_0}\|_2 = |c_{n_0}(g)| = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|$.

Finalement $\boxed{\sup\limits_{f\in E_0, \|f\|_2=1} \|A_g f\|_2 = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|}$.

PARTIE II

Question N° II.1

La fonction $|k_\varepsilon|$ étant paire et dans E_0 :

$$\|k_\varepsilon\|_1 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |k_\varepsilon(y)|\, dy = \frac{2}{T}\int_\varepsilon^{\frac{T}{2}} \frac{1}{y}\, dy = \boxed{\frac{2}{T}\ln\left(\frac{T}{2\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} -\frac{2}{T}\ln(\varepsilon)}$$

Question N° II.2

Sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, 0]$, k_ε étant impaire : $k_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t \in]-\varepsilon, 0] \cup \{-\frac{T}{2}\} \\ \frac{1}{t} & \text{Si } t \in]-\frac{T}{2}, -\varepsilon] \end{cases}$. La condition $p \geq p_0 > \frac{2}{T}$ assure que $0 < \frac{1}{p} < \frac{T}{2}$. D'après(1) : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} k_{\frac{1}{p}}(t) f(x-t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{t} f(x-t)\, dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{t} f(x-t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{T}{2}} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t}\, dt$$

par le changement de variable $t \mapsto (-t)$ dans la première intégrale.

Or f étant C^1 en tout point x, on peut écrire :

$$f(x-t) = f(x) - tf'(x) + o_0(t) \ \text{ et } f(x+t) = f(x) + tf'(x) + o_0(t) \text{ d'où } \lim_{t\to 0} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t} = -2f'(x)$$

ce qui prouve que la fonction $t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}$ qui est déja C^1 sur $\mathbb{R}^*$ est aussi prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $[0, \frac{T}{2}]$, par suite :

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \frac{1}{T}\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{T}{2}} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}\,dt = Af(x)}$$

Pour ce qui est de la convergence uniforme, remarquons que puisque f est dans F_1, f' est C^0 et T-périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x-t)-f(x+t)| = |\int_{x+t}^{x-t} f'(t)\,dt| \leq 2|t|\cdot\|f'\|_\infty$$

Et donc pour tout réel x :

$$|\Phi_p(x) - Af(x)| = |\frac{1}{T}\int_0^{\frac{1}{p}} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}\,dt| \leq \frac{1}{T}\int_0^{\frac{1}{p}} |\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}|\,dt \leq \frac{2}{T}\|f'\|_\infty \frac{1}{p}$$

d'où $\boxed{\|\Phi_p - Af\|_\infty \leq \frac{2}{T}\|f'\|_\infty\frac{1}{p}}$ ce qui assure la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Enfin la linéarité de A provient de la linéarité des applications $A_{k_{\frac{1}{p}}}$ qui se conserve par passage à la limite. De plus d'après I.4 les applications Φ_p sont dans F_0, donc il en est de même pour la limite uniforme Af (la T-périodicité se conserve par passage à la limite et la continuité aussi par passage à la limite uniforme).

Question N° II.3

La convergence uniforme de la suite (Φ_p) vers Af implique, pour tout n fixé dans $\mathbb{Z}$, la convergence uniforme de la suite des applications : $t \mapsto (\Phi_p e_n)_{p\in\mathbb{N}}$ car $\|e_k\|_\infty = 1$ et donc par permutation limite-intégrale et compte-tenu du I.6 :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(Af) = \lim_{p\to\infty}(c_n(\Phi_p)) = \lim_{p\to\infty}(c_n(f)c_n(k_{\frac{1}{p}}))$$

Il ne reste plus qu'à étudier la suite $(c_n(k_{\frac{1}{p}}))_{p\geq p_0}$: Avec les notations usuelles $(a_n(k_{\frac{1}{p}}),\ b_n(k_{\frac{1}{p}}))$ des coefficients trigonométriques, sachant que $a_n(k_{\frac{1}{p}}) = 0$ et $b_n(k_{\frac{1}{p}})) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} k_{\frac{1}{p}}(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\,dt$ puisque $k_{\frac{1}{p}}$ est impaire :

$$c_n(k_{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{2}(a_n(k_{\frac{1}{p}}) - ib_n(k_{\frac{1}{p}})) = \frac{-2i}{T}\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{T}{2}} \frac{\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)}{t}\,dt = \frac{-2i}{T}\int_{\frac{2n\pi}{pT}}^{n\pi}\frac{\sin u}{u}\,du$$

par le changement de variable linéaire : $u = \frac{2n\pi t}{T}$.

La fonction $u\mapsto\frac{\sin u}{u}$ étant continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur tout segment $[0,b]$, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{p\to\infty} c_n(k_{\frac{1}{p}}) = \frac{-2i}{T}\alpha_n$ et donc en tenant compte du fait que α_n n'est défini dans l'énoncé que pour n dans $\mathbb{N}$ et que $n\mapsto c_n(k_{\frac{1}{p}})$ est ici impaire :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(Af) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n=0 \\ \frac{-2i}{T} signe(n)\alpha_{|n|}c_n(f) & \text{Sinon}\end{cases}}$$

Question N° II.4

II.4.1 D'après la relation de Chasles suivi du changement de variable affine $(u = v + 2n\pi)$, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_{2n+2}-\alpha_{2n} = \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{2\pi}\frac{\sin v}{v+2n\pi}\,dv = \int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+2n\pi}\,dv + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin v}{v+2n\pi}\,dv =$$
$$\int_0^{\pi}\sin v\left(\frac{1}{v+2n\pi} - \frac{1}{v+(2n+1)\pi}\right)\,dv \geq 0$$

en changeant v en $(v+\pi)$ dans la deuxième intégrale et sachant que sin est positif sur $[0,\pi]$. Ceci prouve la croissance de la suite (α_{2n}) ; de même

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_{2n+1}-\alpha_{2n-1} = \int_0^{\pi}\sin v\left(\frac{1}{v+2n\pi} - \frac{1}{v+(2n-1)\pi}\right)\,dv \leq 0$$

ce qui prouve la décroissance de la suite (α_{2n+1}).

II.4.2 De même que ci-dessus par le changement de variable affine $u = (v + n\pi)$, sachant que $\sin(v + n\pi) = (-1)^n \sin v$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = |\int_0^\pi (-1)^n \frac{\sin v}{v + n\pi}\, dv| \leq \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}\, dv = \frac{1}{n}$$

et donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0}$, ce qui achève la preuve que les deux suites extraites (α_{2n}) et (α_{2n+1}) sont bien adjacentes et donc convergent vers une même limite ℓ qui vérifie l'encadrement :

$$\boxed{\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \alpha_{2n} \leq \ell \leq \alpha_{2p+1}}$$

Finalement la suite (α_n) est convergente vers $\ell > 0$ puisque par stricte positivité de l'intégrale des fonctions continues $\alpha_2 = \int_0^\pi \sin v \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+\pi}\right) dv > 0$. Remarquons que la démonstration ci-dessus revient à prouver que la série de terme général $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ est alternée et relève de la règle de Leibniz et converge comme donc la suite (α_n) ; on peut d'ailleurs montrer par d'autres méthodes que $\boxed{\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}}$ bien que la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ ne soit pas intégrable (au sens actuel des programmes) sur $\mathbb{R}_+$.

II.4.3 D'après l'encadrement ci-dessus et la décroissance de la suite (α_{2n+1}) on a clairement

$$\boxed{\sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_{2n+1}) = \alpha_1}$$

Question N° II.5

Un raisonnement similaire à celui du I.9, fondé sur l'égalité de Parseval et sur les résultats II.3 et II.4.3 donne pour tout f de E_0 :

$$\|Af\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(Af)|^2 = \frac{4}{T^2}\alpha_{|n|}^2 |c_n(f)|^2 \leq \frac{4}{T^2}\alpha_1^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{4}{T^2}\alpha_1^2 \|f\|_2^2$$

D'où $\sup_{f\in F_1, \|f\|_2=1} \|Af\|_2 \leq \frac{2}{T}\alpha_1$ et il ne reste plus qu'à montrer que la valeur $\frac{2}{T}\alpha_1$ est atteinte (pour $f = e_1$ qui est bien dans F_1 et vérifie $\|f\|_2 = 1$) : d'après II.2 et pour tout x réel :

$$Ae_1(x) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e_1(x-t) - e_1(x+t)}{t}\, dt = \frac{1}{T} e^{\frac{2i\pi x}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{t}\, dt = \frac{-2i}{T} e^{\frac{2i\pi x}{T}} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{-2i}{T}\alpha_1 e_1(x)$$

par le changement de variable affine $t = \frac{T}{2\pi}u$ dans la dernière intégrale. Finalement on a bien :

$$\|Ae_1\|_2 = |\frac{-2i}{T}\alpha_1| \cdot \|e_1\|_2 = \frac{2}{T}\alpha_1 \text{ et donc } \boxed{\sup_{f\in F_1, \|f\|_2=1} \|Af\|_2 = \frac{2}{T}\alpha_1}$$

(on aurait pu aussi utiliser l'égalité de Parseval vue ci-dessus en remarquant que $c_n(e_1) = \delta_{1,n}$).

Question N° II.6

Les sommes partielles $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$ de la série de Fourier de f sont dans F_1 et convergent en moyenne quadratique vers f (c'est à dire : $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$). D'après la linéarité de A et les majorations du II.5 :

$$\|Af_{n+p} - Af_n\|_2 = \|A(f_{n+p} - f_n)\|_2 \leq \frac{2}{T}\alpha_1 \|f_{n+p} - f_n\|_2$$

Mais dans l'espace E_0 muni de la semi-norme $\| \bullet \|_2$ de la convergence en moyenne quadratique, la suite (f_n) est convergente donc est de Cauchy, soit : $\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_{n+p} - f_n\|_2 = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \|Af_{n+p} - Af_n\|_2 = 0}$$

La suite (Af_n) dans l'espace F_0 est donc de Cauchy au sens de la norme $\| \bullet \|_2$ de la convergence en moyenne quadratique mais cet espace n'est pas de dimension finie donc à priori il n'est pas complet et rien n'assure la convergence en moyenne quadratique de la suite (Af_n) (ni même dans l'espace E_0).

Remarque : par un calcul analogue à celui de Ae_1 du II.5, on peut obtenir (en notant ϵ_k le signe de k - pour k=0 on a $\alpha_0 = 0$) : $Ae_k = \frac{-2i}{T}\epsilon_k \alpha_{|k|} e_k$ et donc par linéarité de A : $\boxed{Af_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) Ae_k = \frac{-2i}{T} \sum_{k=-n}^{n} \epsilon_k \alpha_{|k|} c_k(f) e_k}$. On retrouve ainsi une conséquence du II.3 : les coefficients de Fourier de Af_n sont :

$\boxed{c_k(Af_n) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n < |k| \\ \frac{-2i}{T}\epsilon_k \alpha_{|k|} c_k(f) & \text{Si } n \geq |k| \end{cases}}$.

Soit maintenant une fonction φ de E_0 ; d'après la linéarité des coefficients c_n et l'égalité de Parseval :

$$\|Af_n - \varphi\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(Af_n) - c_k(\varphi)|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\frac{-2i}{T}\epsilon_k \alpha_{|k|} c_k(f) - c_k(\varphi)|^2 + \sum_{|k|>n} |c_k(\varphi)|^2$$

et comme $\sum_{|k|>n} |c_k(\varphi)|^2$ n'est autre que le reste d'une série convergente (égalité de Parseval pour φ) : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{|k|>n} |c_k(\varphi)|^2 = 0}$ et donc la convergence en moyenne quadratique de la suite (Af_n) vers φ s'écrit :

$$\left[\lim_{n\to+\infty} \|Af_n - \varphi\|_2^2 = 0\right] \Longleftrightarrow \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\frac{-2i}{T}\epsilon_k \alpha_{|k|} c_k(f) - c_k(\varphi)|^2 = 0\right] \Longleftrightarrow \boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(\varphi) = \frac{-2i}{T}\epsilon_k \alpha_{|k|} c_k(f)}$$

Il est laissé au soin du lecteur averti de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une fonction f de E_0 telle que les coefficients $\left(\frac{-2i}{T}\epsilon_k \alpha_{|k|} c_k(f)\right)$ ne puissent être les coefficients de Fourier d'une fonction φ de E_0.

****