ENS 2001 - PSI

Partie I

I.1) pas de pb. L'hypothèse de domination est bien vérifiée : $|g(x)\cos(tx)| \leq |g(x)|$, cette dernière fonction étant intégrable.

I.2) a) $F_g(t) = \mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{-x+itx}\,dx = \mathrm{Re}\,\frac{1}{1-it} = \frac{1}{1+t^2}$

b) pas de zéros réels

c) F_g est dans E.

I.3) a) $S_{a,A}(t) = a\int_0^{A}\cos(tx)\,dx = a\,\frac{\sin(tA)}{t}$

c) les zéros réels sont les $\frac{k\pi}{A}$, k entier non nul.

d) pas intégrable.

Partie II

II.1) Lemme de Riemann-Lebesgue. Le plus simple est de découper en intervalle où g est C^1 et d'intégrer par parties.

II.2) a) La fonction $x \to \frac{\sin(nx)}{x}$ est continue sur [0,1] (et vaut n en 0).

b) Intégrer par parties : $u' = \sin(nx)$, $v = \frac{1}{x}$ en prenant $u = 1 - \cos(nx)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = l$ qui existe car $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$

(rem : MAPLE donne $\frac{\pi}{2}$ pour cette limite).

II.3) a) $\int_0^1 g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x} = \int_0^1 \frac{g(x)-g(0^+)}{x}\sin(nx)\,dx + \int_0^1 g(0^+)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx$

La première intégrale tend vers 0 (cf II.1) car $x \to \frac{g(x)-g(0^+)}{x}$ est C^1 par morceaux (y compris en 0, faire un développement limité). La seconde intégrale tend vers $g(0^+)l$.

b) Supposons $b > 0$. On a alors :

$\int_0^b g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx = \int_0^1 g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx + \int_1^b g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx$ avec la deuxième intégrale qui tend vers 0 (cd II.1 avec la fonction $\frac{g(x)}{x}$). Donc la limite est $g(0^+)l$. Par contre, si $b < 0$, on trouvera $-\,g(0^-)l$ (faire changement de variable $x \to -\,x$). Enfin, si $b = 0$, l'intégrale est nulle. Donc la limite demandée vaut :

0	si $a < b < 0$
$g(0^-)l$	si $a < b = 0$
$(g(0^-) + g(0^+))l$	si $a < 0 < b$
$g(0^+)l$	si $0 = a < b$
0	si $0 < a < b$

c) Prendre a négatif suffisamment grand en valeur absolue et b suffisamment grand pour que, ε étant donné, $\int_{-\infty}^{a} g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx$ et $\int_{b}^{\infty} g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx$ soient inférieurs à ε en valeurs absolues. Pour cet a et ce b, il existe un rang N_0 tel que pour $n > N_0$, on ait :

$$\left|\int_{a}^{b} g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx - (g(0^-) + g(0^+))l\right| < \varepsilon$$

On aura alors $\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx - (g(0^-) + g(0^+))l\right| < 3\varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx = (g(0^-) + g(0^+))l$

II.4) On a déjà $\int_{-n}^{n} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(ty)\,dy = 2\int_{0}^{n} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(ty)\,dy$

puisque la fonction $t \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(ty)\,dy$ est paire. Considérons les fonctions :

$$X \to 2\int_{0}^{X} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(ty)\,dy \text{ et } X \to 4\int_{0}^{X} F_g(t)\cos(xt)\,dt$$

Ces deux fonctions sont nulles pour X = 0, continues, dérivables (car les fonctions que l'on intégre entre 0 et X sont des fonctions continues de t), de dérivées respectives :

$$2\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(Xy)\,dy \qquad \text{et} \qquad 4\,F_g(X)\cos(xX)$$

La première expression vaut :

$$2\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\cos(Xy - Xx)\,dy = 2\cos(xX)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\cos(Xy)\,dy + 2\sin(xX)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\sin(Xy)\,dy$$

$$= 4\cos(xX)\int_{0}^{\infty} g(y)\cos(Xy)\,dy \text{ en utilisant la parité de } g$$

$$= 4\cos(xX)\,F_g(X) \text{ ce qui est bien la dérivée de la deuxième fonction.}$$

Les deux fonctions ayant même dérivées et étant égales en un point sont égales partout.

II.5) $2\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\,\frac{\sin(Xy)}{y}\,dy$ est également une fonction de X, nulle pour X = 0, continue (l'écrire sous la forme $2X\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\,\varphi(Xy)\,dy$ avec $\varphi(u) = \frac{\sin(u)}{u}$ continue et bornée. On a alors une hypothèse de domination qui est vérifiée : $|g(x+y)\,\varphi(Xy)| \leq \text{Cte} \times |g(x+y)|$). Elle est également dérivable de dérivée $2\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(Xy)\,dy$. Elle est donc égale aux fonctions du II.4). Ainsi, pour X = n :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\,\frac{\sin(ny)}{y}\,dy = 2\int_{0}^{n} F_g(t)\cos(xt)\,dt$$

Quand on fait tendre n vers l'infini, le membre de gauche tend (d'après II.3.c) vers $(g(x^-) + g(x^+))l$ qui n'est autre que $2g(x)l$. D'où le résultat demandé.
II.6) non, cf I.2.c.

Partie III

III.1) a) Prendre A assez grand pour dépasser la valeur absolue des racines de F_g. F_g étant paire, le signe de F_g au delà de A et en deçà de –A est le même, par exemple positif. F_g étant bornée par $\int_0^\infty |g(x)|\,dx$, prendre $a = \int_0^\infty |g(x)|\,dx + 1$.

b) Soit $K(t) = F_g(t) + h_{a,A}(t)$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n K(t)\cos(xt)\,dt = lg(x) + S_{a,A}(x)$$

Pour $x = 0$, on obtient le fait que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n K(t)\,dt$ existe. K étant de signe constant, cela signifie que K est intégrable.

III.2) La fonction $x \to \int_0^\infty K(t)\cos(xt)\,dt$ est continue, de même que $S_{a,A}$ donc g devrait l'être aussi. Ainsi g discontinue en un point au moins implique que F_g possède une infinité de zéros (cas du I.3)

III.3) Cette question montre que la condition ci-dessus n'est pas nécessaire. L'indication donnée dans l'énoncé est mystérieuse. On propose une autre solution. En vérifiant les hypothèses adéquates de domination, on voit que F_g est indéfiniment dérivable et que :

$$F_g^{(3)}(t) = \int_0^\infty x^3 \exp(-x^4)\sin(xt)\,dx = \frac{t}{4}\int_0^\infty \exp(-x^4)\cos(xt)\,dx \text{ en intégrant par parties}$$

$$= \frac{t}{4}F_g(t).$$

En outre, F_g et ses dérivées tendent vers 0 quand t tend vers l'infini (généralisation du lemme de Riemann-Lebesgue vu au II.1) que l'on peut montrer là aussi par une intégration par parties. Par exemple : $F_g^{(3)}(t)$ est de la forme $\int_0^\infty h(x)\sin(xt)\,dx = \left[\frac{-h(x)\cos(xt)}{t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{h'(x)\cos(xt)}{t}\,dx$ avec le crochet qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini, et l'intégrale aussi car $\int_0^\infty h'(x)\cos(xt)\,dx$ reste bornée lorsque h' est intégrable).

Supposons que F_g est de signe constant au delà d'un A, par exemple strictement positive. On a alors :

$F_g^{(3)}(t)$ strictement positive
⇒ $F_g^{(2)}(t)$ strictement croissante. Or $F_g^{(2)}(t)$ tend vers 0 en $+\infty$
donc $F_g^{(2)}(t)$ est strictement négative
⇒ $F_g'(t)$ est strictement décroissante. Or $F_g'(t)$ tend vers 0 en $+\infty$
donc $F_g'(t)$ est strictement positive
⇒ $F_g(t)$ est strictement croissante. Or $F_g(t)$ tend vers 0 en $+\infty$
donc $F_g(t)$ est strictement négative. Contradiction.