Mines PSI 2
Un corrigé

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques.

Q.1. ${}^tT_1 + T_2 = {}^tT_1 + {}^tT_2 = T_1 + T_2$. Ainsi, $T_1 + T_2$ est une matrice symétrique.

Q.2. $m(T)$ et $M(T)$ étant des valeurs propres, on peut trouver des vecteurs propres x_m et x_M associés. Ce sont des vecteurs non nuls et

$$Q_T(x_m) = \frac{(Tx_m|x_m)}{\|x_m\|^2} = m(T)$$

$$Q_T(x_M) = \frac{(Tx_M|x_M)}{\|x_M\|^2} = M(T)$$

Q.3. T étant symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres. Notons $d_1, \dots, d_n$ les valeurs propres associées. Soit $x \in \mathbb{R}^n$; il existe des scalaires x_i tels que $x = \sum_{i=1}^n ie_i$ et on a

$$((Tx, x) = \left(\sum_{i=1}^n d_i x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$$

en utilisant le caractère orthonormée de la base. Avec $m(T) \le d_i \le M(T)$ pour tout i, on en déduit que

$$m(T)\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n m(T)x_i^2 \le (Tx, x) \le \sum_{i=1}^n M(T)x_i^2 = M(T)\|x\|^2$$

ce qui montre l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure pour Q_T avec

$$m(T) \le \inf_{x \neq 0} Q_T(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x \neq 0} Q_T(x) \le M(T)$$

Le majorant et le minorant trouvés pour Q_T étant atteints (question **2**), on a en réalité des minimum et maximum

$$m(T) = \min_{x \neq 0} Q_T(x) \quad \text{et} \quad M(T) = \max_{x \neq 0} Q_T(x)$$

Q.4. Reprenons les notations et calculs de la question précédente :

$$\forall x \neq 0,\ (Tx, x) = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$$

- Si les d_i sont tous positifs alors (Tx, x) est immédiatement positif donc $T \in \mathcal{S}_n^+$. Réciproquement, en choisissant $x = e_i$, $T \in \mathcal{S}_n^+$ entraîne $d_i \ge 0$.
- Si les d_i sont tous strictement positifs alors (Tx, x) est strictement positif (l'un des x_i^2 est > 0 et (Tx, x) est la somme de termes positifs avec au moins un non nul) donc $T \in \mathcal{S}_n^{++}$. Réciproquement, en choisissant $x = e_i$, $T \in \mathcal{S}_n^{++}$ entraîne $d_i > 0$.

Q.5. Si $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = E$ et si $\forall i,\ f_i \in \mathcal{L}(F_i, E)$ alors il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall i,\ f|_{F_i} = f_i$ (f doit être l'application qui a un élément $x \in E$ se décomposant en $x = x_1 + \dots + x_p$, avec $\forall i,\ x_i \in_i$, associe $f(x) = f_1(x_1) + \dots + f_p(x_p)$ et réciproquement, cette application est linéaire et convient).

Il suffit d'appliquer ce résultat avec les F_i égaux aux sous-espaces propres de T : ces sous-espaces sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ puisque T est un endomorhisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, on sait qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres. En notant d_i la valeur propre associée à e_i, on a

$$\forall i \in [1..n],\ U(e_i) = f(d_i)e_i$$

U est donc l'endomorphisme représenté par $\text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. U étant représente par une matrice symétrique dans une base orthonormée, U est un endomorphisme symétrique.

Q.6. On utilise les mêmes notations qu'à la question précédente. On a alors $p(T)$ qui est représenté dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ par $\text{diag}(p(d_1), \dots, p(d_n))$. Mais $\alpha_0 I + \sum_{j=1}^k \alpha_j T_j$ est représenté par la même matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ (car T est représenté par $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et donc T^j est représenté par $\text{diag}(d_1^j, \dots, d_n^j)$). On a donc bien

$$p(T) = \alpha_0 I + \sum_{j=1}^k \alpha_j T_j$$

Q.7. La matrice de $g(T)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $\text{diag}(g(d_1), \dots, g(d_n))$. Notons

$$p \ : \ t \mapsto \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \left(g(\lambda) \prod_{\mu \in \sigma(t) \setminus \{\lambda\}} \frac{t - \mu}{\lambda - \mu} \right)$$

p est une fonction polynomilae et on a $\forall i,\ p(d_i) = g(d_i)$ et donc $g(T) = p(T)$ (les deux endomorphismes étant représentés par la même matrice dans la base des e_i).
$g(T)$ est donc toujours un polynôme en T.
Remarque : le polynôme p introduit plus haut est bien sûr un polynôme interpolateur de Lagrange associé aux λ et $g(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(T)$.

Q.8. Dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, $f(T)$ est représenté par $\text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n))$ et on a donc

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Les e_i forment une base de vecteurs propres pour $f(T)$. On obtient les sous-espaces propres de $f(T)$ en "regroupant" les e_i associés à la même valeur propre pour $f(T)$ c'est à dire tels que les $f(d_i)$ ont une valeur commune. On en déduit que

$$\forall \lambda \in \sigma(T),\ \ker(f(T) - f(\lambda)I) = \bigoplus_{\mu \in \sigma(T),\ f(\mu) = f(\lambda)} \ker(T - \mu I)$$

Q.9. Continuons à travailler matriciellement. Dans la bse $(e_1, \dots, e_n)$, $(fg)(T)$ est représenté par $\text{diag}(f(d_1)g(d_1), \dots, f(d_n)g(d_n))$. $f(T) \circ g(T)$ est lui représenté par le produit des matrices diagonales $\text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n))$ et $\text{diag}(g(d_1), \dots, g(d_n))$ ce qui donne le même résultat. Ainsi

$$(fg)(T) = f(T) \circ g(T)$$

Q.10. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}$; on a donc $\sigma(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $f(S)$ a une sens. Appliquons le résultat précédent avec f et $g \ : \ t \mapsto t$. On a $(fg)(t) = 1$ et donc $(fg)(S) = I$ (représenté par I_n dans la base des e_i) et $g(S) = S$. La question **9.** donne $f(S) \circ T = f(S) \circ g(S) = (fg)(S) = I$ et donc

$$f(S) = S^{-1}$$

Q.11. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+$. On a $\sigma(S) \subset \mathbb{R}^+$ et $\sqrt{S}$ est donc bien défini. Avec la question **9** on a (puisque $f^2 \ : \ t \mapsto t$ et donc $f^2(S) = S$)

$$(\sqrt{S})^2 = (f^2)(S) = S$$

On suppose que les valeurs propres de S sont simples : les sous-espaces propres de S sont donc des droites vectorielles (et il y en a n). On notera $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée formée de vecteurs propres pour S et $d_1, \dots, d_n$ les valeurs propres associées (positives par $S \in \mathcal{S}_n^+$). On va raisonner par conditions nécessaires puis suffisantes pour trouver les solutions dans $\mathcal{S}_n$ de l'équation $C^2 = S$.

- Si C convient alors C et S commutent ($CS = SC = C^3$). Les sous-espace propre $\text{Vect}(e_i)$ pour S sont donc stables par C et les e_i sont propres pour C. C est donc représenté dans $(e_1, \dots, e_n)$ par une matrice diagonale $\text{diag}(c_1, \dots, c_n)$. $C^2 = S$ donne $\forall i,\ c_i^2 = d_i$ et donc $c_i = \pm\sqrt{d_i}$.
- Réciproquement, l'endomorphisme C représenté par $\text{diag}(\pm\sqrt{d_1}, \dots, \pm\sqrt{d_n})$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifie $C^2 = S$ et est symétrique (représenté par une matrice symétrique en b.o.n.)

Il y autant de solution de $C^2 = S$ dans $\mathcal{S}_n$ que de choix différents du n-uplet $(\pm\sqrt{d_1}, \dots, \pm\sqrt{d_n})$.
On doit distinguer deux cas.
- Si $\forall i,\ d_i > 0$ ($S \in \mathcal{S}_n^{++}$) il y a 2^n solutions dans $\mathcal{S}_n$ à l'équation $C^2 = S$.
- Si $\exists i,\ d_i = 0$ (i est alors unique) il y a 2^{n-1} solutions dans $\mathcal{S}_n$ à l'équation $C^2 = S$.

On obtient les solutions dans $\mathcal{S}_n^+$ en choisissant parmi celles dans $\mathcal{S}_n$ celles à valeurs propres positives. Il n'y a donc qu'une solution de $C^2 = S$ dans $\mathcal{S}_n^+$.

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.

Q.12. On a trois propriétés à vérifier.
- Soit $A \in \mathcal{S}^n$. $A - A = 0$ est symétrique à valeurs propres positive et donc $A \leq A$. La relation $\leq$ est réflexive.
- Soient $A, B, C \in \mathcal{S}^n$. Si $A \leq B$ et $B \leq C$ alors $B - A$ et $C - B$ sont positive. La somme de deux éléments de $\mathcal{S}_n^+$ étant dans $\mathcal{S}_n^+$ (question **1** et $((M + N)X|X) = (MX|X) + (NX|X)$), $C - A$ est positive et $A \leq C$. La relation $\leq$ est transitive.
- Soient $A, B \in \mathcal{S}^n$. Si $A \leq B$ et $B \leq A$ alors $M = B - A$ et $-M$ sont dans $\mathcal{S}_n^+$. Les valeurs propres de $-M$ étant les opposées de celles de M, ces valeurs propres sont négatives (M positive) et positives ($-M$ positive). M est donc diagonalisable et 0 est sa seule valeur propre. Ainsi $M = 0$ et donc $A = B$. La relation $\leq$ est antisymétrique.

La relation n'est pas totale quand $n \geq 2$ car A et B canoniquement associés à $\text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ et $\text{diag}(0, 1, \dots, 0)$ ne sont pas comparables pour $\leq$ (ni $A - B$ ni $B - A$ ne sont dans $\mathcal{S}_n^+$ car ils ont -1 comme valeur propre).

Q.13. U étant symétrique, on a

$$(U \circ M \circ U(x), x) = (M(Ux), U(x))$$

Si $M \in \mathcal{S}N^+$, la quantité précédente est positive. En supposant $T_1 \leq T_2$ et en appliquant ceci avec $M = T_2 - T_1$, on obtient $U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U$.

Q.14. On utilise les notations de l'énoncé et on va prouver que $t \mapsto t^2$ ne définit pas un opérateur croissant dans le cas $n = 2$.
Tout d'abord, T_1 et T_2 sont symétriques (représentés par des matrices symétriques dans la base canonique qui est orthonormée) et $\sigma(T_1) = \{0, 1\}$ et $\sigma(T_2) = \{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\}$ sont inclus dans $\mathbb{R}^+$ (ce que l'on doit vérifier car f est donnée définie sur $\mathbb{R}^+$).
$T_2 - T_1$ est représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par $\text{diag}(1, 0)$ et donc $T_2 \geq T_1$ (les valeurs propres de $T_2 - T_1$ sont positives).
On a $M_2^2 - M_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui admet une valeur propre strictement négative (le déterminant, produit des valeurs propres, vaut -1). Ainsi, $T_2^2 - T_1^2$ n'est pas dans $\mathcal{S}_n^+$ et on n'a pas $T_2^2 \geq T_1^2$.
Pour obtenir un contre exemple avec n quelconque, il suffit de considérer les endomorphismes canoniquement associés aux matrices bloc diagonales $\text{diag}(M_1, I_{n-2})$ *et* $\text{diag}(M_2, I_{n-2})$.

Q.15. On suppose $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T_2 \geq T_1$. On a $\sigma(T_1), \sigma(T_2) \subset \mathbb{R}^{+*}$.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de vecteurs propres pour T_2 et si on note d_1 la valeur propre de T_2 associée à e_i, on a $\sqrt{T_2}$ qui est représenté dans cette base par $\text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$; c'est une matrice inversible d'inverse $\text{diag}(1/\sqrt{d_1}, \dots, 1/\sqrt{d_n})$. Si on pose $U = (\sqrt{T_2})^{-1}$, on a $U \in \mathcal{S}_n$ et $U \circ T_2 \circ U = I$ (représenté par I_n dans la base des e_i). La question **13** donne alors $I - U \circ T_1 \circ U \in \mathcal{S}_n^+$ et donc $\sigma(I - U \circ T_1 \circ U) \subset \mathbb{R}^+$. Or,

pour tout endomorphisme M, $\sigma(I-M)=\{1-\lambda/\ \lambda\in\sigma(M)\}$ (puisque $\chi_{I-M}(x)=\det(I-M-xI)=(-1)^n\det(M-(1-x)I)=\chi_M(1-x)$)

Toutes les valeurs propres de $M=U\circ T_1\circ U$ sont donc plus petites que 1. Comme $T_1\geq 0$, la question **13** donne $M\geq 0$ et donc les valeurs propres de M sont positives. Enfin, elles sont non nulles car M est inversible (produit de telles matrices). On a donc $\sigma(M)\in]0,1]$. Or, $\sigma(M^{-1})=\{1/\lambda/\ \lambda\in\sigma(M)\}$ et donc $\sigma(M^{-1})\subset[1,+\infty[$. Les valeurs propres de la matrice symétrique $U^{-1}T_1^{-1}U^{-1}-I$ sont donc positive et ainsi $U^{-1}T_1^{-1}U^{-1}\geq I$.

On applique alors à nouveau **13** pour obtenir $T_1^{-1}\geq UIU=T_2^{-1}$.

Pour $f\ :\ t\mapsto(-1/t)$, on a $f(T_2)-f(T_1)=T_1^{-1}-T_2^{-1}$ est à valeurs propres positives et f définit un opérateur croissant.

Q.16. Soient $T_2\geq T_1$ avec $T_1,T_2\in\mathcal{S}_n^+$.

Soit λ une valeur propre de $T_2^{1/2}-T_1^{1/2}$ et x un vecteur propre associé. On remarque que

$$(T_2^{1/2}+T_1^{1/2})\circ(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})(x)=\lambda(T_2^{1/2}(x)+T_1^{1/2}(x))$$

Par ailleurs, en développant $(T_2^{1/2}+T_1^{1/2})\circ(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})$ on a aussi

$$(T_2^{1/2}+T_1^{1/2})\circ(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})(x)=T_2(x)-T_1(x)+(T_1^{1/2}T_2^{1/2}-T_2^{1/2}T_1^{1/2})(x)$$

En identifiant les deux expressions et en prenant le produit scalaire avec x, il vient

$$\lambda\left((T_2^{1/2}(x),x)+(T_1^{1/2}(x),x)\right)=((T_2-T_1)(x),x)+((T_1^{1/2}T_2^{1/2}-T_2^{1/2}T_1^{1/2})(x),x)$$

Comme $M=(T_1^{1/2}T_2^{1/2}-T_2^{1/2}T_1^{1/2})$ est antisymétrique, on a $(Mx,x)=(x,-Mx)=-(x,Mx)$ et cette quantité est nulle. Ainsi (et en utilisant $T_2-T_1\in\mathcal{S}_n^+$)

$$\lambda\left((T_2^{1/2}(x),x)+(T_1^{1/2}(x),x)\right)=((T_2-T_1)(x),x)\geq 0$$

$(T_2^{1/2}(x),x)$ et $(T_1^{1/2}(x),x)$ sont des quantité positives (car $T_i^{1/2}\in\mathcal{S}_n^+$). Distinguons deux cas

- Si $(T_2^{1/2}(x),x)>0$ ou $(T_1^{1/2}(x),x)>0$ alors la somme est >0 et on obtient $\lambda\geq 0$.
- Sinon, $(T_2^{1/2}(x),x)=(T_1^{1/2}(x),x)=0$ et donc $\lambda\|x\|^2=(\lambda x|x)=(T_2^{1/2}(x),x)-(T_1^{1/2}(x),x)=0$ et donc $\lambda=0$ (car $\|x\|>0$).

Dans tous les cas, $\lambda\geq 0$ et donc

$$\sigma(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})\subset\mathbb{R}^+$$

$\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}$ est ainsi dans $\mathcal{S}_n^+$ (symétrique à valeurs propres positives). Ceci signifie exactement que la fonction $f\ :\ t\geq 0\mapsto\sqrt{t}$ est un opérateur croissant.

3 Inégalité de Löwner-Heinz.

Q.17. Soient $T_2,T_2\in\mathcal{S}_n^{++}$ (symétriques à spectre dans $\mathbb{R}^{+*}$) telles que $T_2\geq T_1$. En remarquant que $f_u(t)=1-\frac{u}{t+u}$, on obtient

$$f_u(T_i)=I-u(T_i+uI)^{-1}$$

On en déduit que

$$f_u(T_2)-f_u(T_1)=u\left((T_1+uI)^{-1}-(T_2+uI)^{-1}\right)$$

Or, $T_2+uI\geq T_1+u_I$ et que ces matrices sont dans $\mathcal{S}_n^{++}$ (somme d'un élément de $\mathcal{S}_n^{++}$ et d'un autre de $\mathcal{S}_n^+$), la question **15** indique que $(T_1+uI)^{-1}\geq(T_2+uI)^{-1}$. Multiplier par le scalaire $u\geq 0$ garde l'inégalité (car $\sigma(uM)=u\sigma(M)$ si $u\neq 0$ et $\sigma(0M)=\{0\}$) et ainsi $f_u(T_2)\geq f_u(T_1)$. f_u est donc un opérateur croissant.

Q.18. Soit $\mathcal{B}_1$ une autre base de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi_1(s)$ la matrice de $\varphi(s)$ dans cette base. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$, on a

$$\Phi_1(s) = P^{-1}\Phi(s)P$$

Les fonctions coordonnées de Φ_1 sont donc des combinaisons linéaires de celles de Φ (P est une matrice constante, indépendante de la variable s). Comme $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*})$ et $L^1(\mathbb{R}^+)$ sont des espaces vectoriels, la continuité et l'intégrabilité des fonctions coordonnées de Φ entraîne la continuité et l'intégrabilité des fonctions coordonnées de Φ_1. En outre, la linéarité du passage à l'intégrale donne

$$\int_0^{+\infty} \Phi_1(s)\, ds = \int_0^{+\infty} P^{-1}\Phi(s)P\, ds = P^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi(s)\, ds\right) P$$

$\int_0^{+\infty} \Phi_1(s)\, ds$ et $\int_0^{+\infty} \Phi(s)\, ds$ représentent dons le même endomorphisme dans les base $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}$ (formule de changement de base).
Les définitions données (intégrabilité ET valeur de l'intégrale) sont donc indépendantes du choix de la base.

Q.19. S étant symétrique réelle, on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour S. Dans cette base, S est représentée par $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $\forall i,\ d_i > 0$.
Avec ce choix de $\mathcal{B}$, on a

$$\Phi(u) = \text{diag}(\frac{d_1 u^{a-1}}{d_1 + u}, \dots, \frac{d_n u^{a-1}}{d_n + u})$$

Pour $i \neq j$, $\Phi_{i,j}$ est nulle et donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\Phi_{i,i}\ :\ u \mapsto \frac{d_i u^{a-1}}{d_i+u}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Au voisinage de 0 (et comme $d_i > 0$) $\Phi_{i,i}(u) \sim u^{a-1}$ est intégrable car $1 - a < 1$. Au voisinage de $+\infty$, $\Phi_{i,i}(u) \sim d_i u^{a-2}$ est intégrable car $2 - a > 1$. Finalement, $\Phi_{i,i}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Avec les définitions données, φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q.20. Pour montrer l'identité des endomorphismes, on va montrer l'égalité des matrices qui les représentent dans la bse $\mathcal{B}$ précédemment définie. S^a est représenté par la matrice $\text{diag}(d_1^a, \dots, d_n^a)$.
Avec l'identité (6), on a pour tout i,

$$d_i^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(d_i) u^{a-1}\, du$$

Par ailleurs, on a vu que

$$\int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1}\, du = \text{diag}\left(\int_0^{+\infty} \frac{d_i u^{a-1}}{d_i + u}\, du\right)_{1\leq i\leq n} = \text{diag}\left(\int_0^{+\infty} f_u(d_i) u^{a-1}\, du\right)_{1\leq i\leq n}$$

On a donc bien l'égalité voulue pour les matrices et ainsi

$$S^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1}\, du$$

Q.21. Travaillons dans un premier temps sur $\mathbb{R}^{+*}$ (en ne nous intéressant donc à φ_a que sur $\mathbb{R}^{+*}$). Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n^{++}$ (puisque l'on suppose les spectres inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$) telles que $T_2 \geq T_1$. D'après la question précédente, on a

$$T_i^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(T_i) u^{a-1}\, du$$

et donc

$$T_2^a - T_1^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} (f_u(T_2) - f_u(T_1)) u^{a-1}\, du$$

Remarquons que

$$\forall \varphi \ : \ \mathbb{R}^{+*} \to \mathcal{S}_n^+, \ \text{ si } \varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ alors } \ M = \int_0^{+\infty} \varphi(u)\, du \in \mathcal{S}_n^+$$

En effet, soit φ vérifiant les bonnes hypothèses. Soit $x \in \mathbb{R}^n$; on a $(M(x), x) = \int_0^{+\infty} (\varphi(u)(x), x)\, du \geq 0$ car pour tout u, $(\varphi(u)(x), x) \geq 0$.

En appliquant ceci avec $\varphi \ : \ u > 0 \mapsto (f_u(T_2) - f_u(T_1))u^{a-1}$ (qui est bien à valeurs dans $\mathcal{S}_n^+$ avec la question **17**), on obtient $T_2^a \geq T_1^a$.

On a ainsi prouvé que la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de φ_a définit un opérateur croissant.

Si l'on veut travailler sur $\mathbb{R}^+$, il faut pouvoir généraliser les questions **19** et **20** au cas où $S \in \mathcal{S}_n^+$. De manière implicite, φ_a est "prolongée par continuité" en 0 par la valeur 0 (pour $t > 0$, $\varphi_a(t) = e^{a \ln(t)} \to 0$ quand $t \to 0^+$ car $a > 0$). Le seul endroit où l'on utilise la stricte positivité des d_i est en question **19** quand on étudie l'intégrabilité en 0 de $\Phi_{i,i}$. Mais si $d_i = 0$ alors $\Phi_{i,i} = 0$ et cette intégrabilité est immédiate. Le résultat est donc valable aussi pour φ_a sur tout $\mathbb{R}^+$.