# Mines PSI 1
# Un corrigé

## 1 La lemniscate de Bernoulli.

**Q.1.** Soit $M = (x, y)$ avec $x \geq 0$ et $y \leq 0$ un point de la lemniscate. Il existe donc $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et $\rho \geq 0$ tel que $M = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ (appartenance au quart de plan) et $r^4 = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2\cos(2\theta)$ (appartenance à la lemniscate). On en déduit que $r = 0$ ou $r^2 = \cos(2\theta)$. Dans le second cas, $\cos(\theta) \geq 0$ et donc $\theta \in [-\pi/4, 0]$ (sachant que $\theta \in [-\pi/2, 0]$) et $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$. Comme $\cos(2\theta)$ s'annule pour $\theta = \pi/4$, cette dernière condition inclut le premier cas (de nullité de $r$). On vient donc de montrer que

$$((x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \ \text{ vérifie } \ (1)) \Rightarrow (\exists\, \theta \in [-\pi/4, 0]/\ M = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \ \text{ avec } \ r = \sqrt{\cos(2\theta)})$$

La réciproque est une vérification immédiate. Ainsi une équation polaire de l'intersection de la lemniscate et du quart de plan inférieur droit est

$$\rho = g(\theta) \ \text{ avec } \ g \ : \ \theta \in [-\pi/4, 0] \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$$

On montre immédiatement que
- $(x, y)$ vérifie (1) ssi $(-x, y)$ vérifie (1)
- $(x, y)$ vérifie (1) ssi $(x, -y)$ vérifie (1)

Comme $(x, y) \mapsto (-x, y)$ envoie le quart de plan inférieur droit sur le quart de plan inférieur gauche et que $(x, y) \mapsto (x, -y)$ envoie le demi-plan inférieur sur le demi plan supérieur, on obtient donc la lemniscate en entier en partant de son intersection avec le le quart de plan inférieur droit puis
- en réalisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (ce qui donne la partie inférieure de la lemniscate)
- en réalisant alors une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (ce qui donne la lemniscate en entier).

**Q.2.** On a les trois résultats suivants.
- $\theta \mapsto 2\theta$ est une bijection de $[-\pi/4, 0]$ dans $[-\pi/2, 0]$.
- $t \mapsto \cos(t)$ est une bijection de $[-\pi/2, 0]$ dans $[0, 1]$.
- $u \mapsto \sqrt{u}$ est une bijection de $[0, 1]$ dans lui même.

Par résultat de composition, $g$ est donc une bijection de $[-\pi/4, 0]$ dans $[0, 1]$.

**Q.3.** En notant $u_\theta$ le vecteur polaire d'angle $\theta$ (i.e. $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$), le quart de lemniscate est paramétré par $\theta \in [-\pi/4, 0] \mapsto g(\theta)u_\theta = M(\theta)$. On passe par l'origine pour $\theta = -\pi/4$ mais $g$ n'est pas dérivable en $-\pi/4$ et on ne peut *a priori* utiliser les méthodes classiques de dérivation pour obtenir la tangente à la courbe en $M(-\pi/4)$ (on ne peut même *a priori* affirmer qu'il en existe une). On revient à la définition de la tangente et on cherche à savoir si $T(\theta) = \frac{\overrightarrow{M(-\pi/4)M(\theta)}}{\|\overrightarrow{M(-\pi/4)M(\theta)}\|}$ admet une limite quand $\theta \to -\pi/4^+$. Comme $T(\theta) = u_\theta$, on a donc effectivement une tangente portée par la droite polaire d'équation $\theta = -\pi/4$.
D'éprès les symétrie données plus haut, on a deux tangentes à la lemniscate en l'origine qui sont les droites polaires d'équations $\theta = -\pi/4$ et $\theta = \pi/4$.

**Q.4.** *Dans le demi plan $x \geq 0$, il est clair (au vu du dessin) qu'il existe deux point de la lemniscate correspondant au même $\rho$. Il ne va donc pas être possible de paramétrer la demi-lemniscate par $\rho$ comme demandé (on ne peut parler DU point de paramètre $\rho$. Dans ce qui suit, je garde donc la quart de lemniscate inférieur droit.*
Soit $M$ un point du quart de lemniscate ; il existe $\theta \in [-\pi/4, 0]$ tel que $\overrightarrow{OM(\theta)} = \sqrt{\cos(2\theta)}u_\theta$.

Si on pose $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ on a alors $\rho \in [0,1]$ et $\cos(2\theta) = \rho^2$. Compte-tenu de la position de $\theta$, on obtient $2\theta = -\arccos(\rho^2)$. Le point est donc aussi sur la courbe paramétrée par $\rho \in [0,1] \mapsto \rho u_{-\arccos(\rho^2)/2} = P(\rho)$.
Réciproquement, un point $P(\rho)$ avec $\rho \in [0,1]$ est bien sur le quart de lemniscate et ce quart de lemniscate est bien paramétré par $\rho \in [0,1] \mapsto P(\rho)$.
Dans la suite, je note $\theta\ :\ \rho \mapsto -\arccos(\rho^2)/2$ et on a donc $P(\theta) = \rho u_{\theta(\rho)}$.
Sur $[0,1[$, $\rho \mapsto P(\rho)$ est dérivable de dérivée $\rho \mapsto u_{\theta(\rho)} + \rho\theta'(\rho)u_{\theta(\rho)+\pi/2}$ et la dérivée de l'abscisse curviligne, norme de cette dérivée (et donc vitesse numérique) vérifie

$$\forall \rho \in [0,1[,\ s'(\rho) = \sqrt{1+\rho^2\theta'(\rho)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}$$

où on a utilisé la dérivée sur $[0,1[$ de arccos qui est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{1-x^2}$.
*On remarque que l'équation n'est vérifiée que sur* $[0,1[$ *et n'a pas de sens en* $1$.

## 2 Le sinus lemniscatique.

**Q.5.** $f\ :\ r \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ est continue sur $[0,1[$ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de 1. Or, $1-r^4 = (1-r)(1+r+r^2+r^3)$ et donc $f(r) \sim_1 \frac{1}{2\sqrt{1-r}}$ est intégrable au voisinage de 1. $f$ est donc intégrable sur $[0,1[$ et la quantité $\sigma$ existe a fortiori.
**Q.6.** Pour $a \in [0,1[$, $\int_0^a s'(r)\ dr$ est la longueur de l'arc de lemniscate entre le point de paramètre $\rho = 0$ (l'origine) et celui de paramètre $a$. $\sigma$, limite de la quantité précédente quand $a \to 1$, est donc la longueur du quart de lemniscate.
**Q.7.** $f\ :\ r \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ étant continue sur l'intervalle $]-1,1[$ et comme $0 \in ]-1,1[$, le théorème fondamental nous apprend que $F$ est une primitive de $f$ sur $]-1,1[$. Comme $f$ est en réalité de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ (par théorème d'opérations), on a donc

$$F \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$$

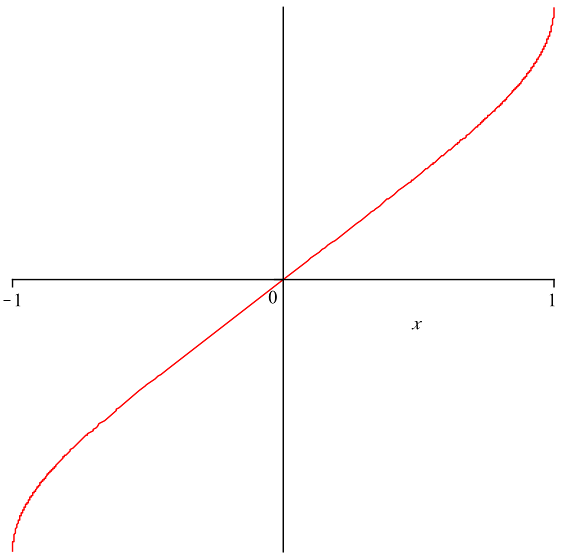
Enfin, c'est par définition de l'intégrale que $F(x) \to F(1)$ quand $x \to 1$ et que $F$ est donc continue en 1. La continuité en $-1$ se prouve de la même façon après avoir prouvé que $f$ est intégrable sur $]-1,0]$ (ce qui découle sdu résultat sur $[0,1[$ et de la parité de $f$). Ainsi

$$F \in \mathcal{C}^0([-1,1])$$

**Q.8.** On a vu à la question précédente que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

$F$ est ainsi strictement croissante sur $]-1,1[$ et, étant continue en $-1$ et 1, l'est aussi sur $[-1,1]$. Comme $F'(x) \to +\infty$ quand $x \to \pm 1$, le théorème de limite de la dérivée (utilisable car $F \in \mathcal{C}^1(]-1,1[) \cap \mathcal{C}^0([-1,1])$ indique que $F$ n'est pas dérivable en $\pm 1$ mais que son graphe admet, en ces points, une demi-tangente verticale. Enfin, la partité de $f$ donne l'imparité de $F$. L'allure du graphe de $F$ est la suivante




**Q.9.** Le cours nous indique que $r \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-r}}$ est DSE de rayon de convergence égal à 1 avec

$$\forall r \in ]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-r}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} r^n$$

*C'est un cas particulier du développement connu de $r \mapsto (1+r)^\alpha$.*
On en déduit que

$$\forall r \in ]-1,1[,\ F'(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} r^{4n}$$

Par théorème de primitivation, $F$ est DSE (de rayon de convergence égal à celui de $F$ et donc égal à 1).

**Q.10.** Comme $F(0)$ et comme on peut primitiver terme à terme les DSE, la question précédente donne

$$\forall r \in ]-1,1[,\ F(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (4n+1)} r^{4n+1}$$

**Q.11.** Avec la formule de Stirling, on a

$$b_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (4n+1)} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} e^{-2n}}{4^n 2\pi n n^{2n} e^{-2n} (4n+1)} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

qui est le terme général d'une série convergente.
*Si on note $F(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$, on a $a_n = 0$ si $n \neq 1[4]$ et $a_{4n} = b_n$. Les sommes partielles de $\sum(a_n)$ sont majorées par la somme de $\sum(b_n)$ car les termes omis sont nuls et ceux ajoutés sont positifs). La suite de ces sommes partielles étant croissante, elle converge et donc $\sum(a_n)$ converge.* Comme

$$\forall r \in ]-1,1[,\ |a_n r^n| \leq a_n$$

la série entière définissant $F$ est normalement convergente sur $]-1,1[$. Par théorème de double limite et continuité de $F$ en 1, on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (4n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1} F(x) = F(1) = \sigma$$

**Q.12.** on a vu en question 8 que $F$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-1,1]$. Comme elle est aussi continue, le théorème de la bijection réciproque indique que $F$ réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[F(-1), F(1)] = [-\sigma, \sigma]$. Cette bijection réciproque est continue et impaire car $F$ possède ces propriétés.

**Q.13.** $F$ étant dérivable à dérivée ne s'annulant pas sur $]-1,1[$, le cours nous indique que $F^{-1}$ est dérivable sur $]-\sigma,\sigma[$ avec

$$\forall x\in]-\sigma,\sigma[,\ (F^{-1})'(x)=\frac{1}{F'(F^{-1}(x))}=\sqrt{1-F^{-1}(x)^4}$$

On remarque que

$$\lim_{x\to\sigma}(F^{-1})'(x)=\lim_{x\to-\sigma}(F^{-1})'(x)=0$$

Le théorème de limite de la dérivée (déjà cité en question 8) indique que $F^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma,\sigma]$ avec

$$(F^{-1})'(\sigma)=(F^{-1})'(-\sigma)=0$$

**Q.14.** Pour montrer qu'une fonction $T$-périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit que l'on montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,a+T]$ avec la même dérivée à droite en $a$ et à gauche en $a+T$.
Ici, `sl` est, par construction, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[--\sigma,\sigma]$ avec une dérivée à droite en $-\sigma$ et une dérivée à gauche en $\sigma$ qui sont nulles. Le premier prolongement donne alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sigma,3\sigma]$ avec une dérivée à droite en $\sigma$ et une dérivée à gauche en $3\sigma$ qui sont nulles. Le raccord se faisant bien en $\sigma$, la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma,3\sigma]$ (avec une dérivée nulle en $\sigma$). Et comme les dérivées à droite en $-\sigma$ et gauche en $3\sigma$ sont égales, la remarque initiale indique que

$$\mathtt{sl}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

En outre, la formule vue plus haut donne

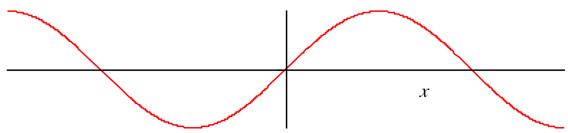
$$\forall x\in[-\sigma,\sigma],\ \mathtt{sl}'(x)=\sqrt{1-\mathtt{sl}(x)^4}$$

Comme $\forall y\in[\sigma,3\sigma],\ \mathtt{sl}(y)=\mathtt{sl}(2\sigma-y)$, on a aussi

$$\forall x\in[\sigma,3\sigma],\ \mathtt{sl}'(x)=-\mathtt{sl}'(2\sigma-x)=-\sqrt{1-\mathtt{sl}(2\sigma-x)^4}=-\sqrt{1-\mathtt{sl}(x)^4}$$

$\mathtt{sl}'$ étant périodique, les formules précédentes suffisent pour l'obtenir en tout point.

**Q.15.** On symétrise le graphe de $F$ par rapport à la première bissectrice, on opère une symétrie par rapport à la droite verticale $x=\sigma$ et on complète par périodicité. On obtient une courbe qui ressemble à une sinusoïde.



## 3 Equation différentielle.

**Q.16.** Avec les expressions obtenues en question 14, on obtient que $\texttt{sl}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\sigma, \sigma]$ avec

$$\forall x \in [-\sigma, \sigma],\ \texttt{sl}''(x) = -2\texttt{sl}'(x)\texttt{sl}(x)^3(1 - \texttt{sl}(x)^4)^{-1/2} = -2\texttt{sl}(x)^3$$

*ATTENTION : en $\sigma$ (resp. $-\sigma$), on n'obtient qu'une dérivée seconde à gauche (resp. à droite) et l'écriture précédente est un peu abusive.*

De même, $\texttt{sl}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\sigma, 3\sigma]$ avec

$$\forall x \in [\sigma, 3\sigma],\ \texttt{sl}''(x) = 2\texttt{sl}'(x)\texttt{sl}(x)^3(1 - \texttt{sl}(x)^4)^{-1/2} = -2\texttt{sl}(x)^3$$

*Cette fois on n'obtient qu'une dérivée seconde à gauche (resp. à droite) en $3\sigma$ (resp. $\sigma$).*

Comme les dérivée seconde “directionnelles” sont les mêmes en $\sigma$, $\texttt{sl}$ est en fait deux fois dérivable en ce point (et même à dérivée seconde continue). De même, la dérivée seconde à gauche en $3\sigma$ vaut celle à droite en $-\sigma$ (car $\texttt{sl}$ est $4\sigma$-périodique) et le prolongement par périodicité effectué, c'est à dire $\texttt{sl}$ est deux fois continument dérivable en $-\sigma$ (et donc $3\sigma$). Finalement,

$$\texttt{sl} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

De plus, on a vu la formule (5) sur $[-\sigma, 3\sigma]$ et elle reste vraie sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

**Q.17.** Par théorèmes d'opérations, $H$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = 2f'(x)f''(x) + 4f'(x)f(x)^3 = 0$$

car $f$ est solution de (5) sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ étant un intervalle, $H$ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

**Q.18.** Remarquons que $(H^{-1/4}f(x))^4 = \frac{f(x)^4}{H} = \frac{f(x)^4}{f'(x)^2+f(x)^4} \in [0,1]$ et donc $H^{-1/4}f(x) \in [-1,1]$. $\varphi$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. $F$ étant dérivable sur $]-1,1[$, $\varphi$ sera dérivable (à dérivée continue) en un point $x$ quand $H^{-1/4}f(x) \in ]-1,1[$ et donc dès que $f'(x)^2 > 0$ d'après le calcul qui précède.

Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle où $f'$ ne s'annule pas. On vient de justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha, \beta[)$ et les théorèmes d'opérations donnent, après calcul,

$$\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ \varphi'(x) = H^{1/4}\frac{f'(x)}{|f'(x)|}$$

Par théorème des valeurs intermédiaires, $f'$ est de signe constant sur $]\alpha, \beta[$. On distingue deux cas

- Si $\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ f'(x) > 0$ alors $\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ \varphi'(x) = H^{1/4}$. Il existe donc une constante $b$ telle que $\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ F(H^{-1/4}f(x)) = \varphi(x) = H^{1/4}x + b$. En particulier, $H^{1/4}x + b$ est dans $[-\sigma, \sigma]$ et en composant par $F^{-1}$ on obtient

$$\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ f(x) = H^{1/4}F^{-1}(H^{1/4}x + c) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

- Si $\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ f'(x) < 0$ alors $\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ \varphi'(x) = -H^{1/4}$. Il existe donc une constante $c$ telle que $\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ F(H^{-1/4}f(x)) = \varphi(x) = -H^{1/4}x + c$. En particulier, $-H^{1/4}x + c)$ est dans $[-\sigma, \sigma]$ et en composant par $F^{-1}$ on obtient

$$\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ f(x) = H^{1/4}F^{-1}(-H^{1/4}x + c) = H^{1/4}\texttt{sl}(-H^{1/4}x + c)$$

Pour $y \in [-\sigma, \sigma]$, on a $\texttt{sl}(2\sigma - y) = \texttt{sl}(y)$. En posant $b = 2\sigma - c$, on obtient alors

$$\forall x \in ]\alpha, \beta[,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

**Q.19.** Soit $I = ]\alpha, \beta[$ tel que $\beta - \alpha > 2\sigma H^{-1/4}$. Si, par l'absurde, $f'$ ne s'annulait pas sur $I$, la question précédente donnerait l'existence d'une constante $b$ telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

Quand $x$ décrit $I$, $H^{1/4}x + b$ décrit un intervalle ouvert de longueur $H^{1/4}(\beta - \alpha) > 2\sigma$. Sur un tel intervalle, sl prend au moins l'une des valeur 1 ou $-1$ (puisque l'intervalle contient une valeur du type $(2k+1)\sigma$ avec $k \in \mathbb{Z}$). $f$ prend alors au moins une fois la valeur $H^{1/4}$ ou $-H^{-1/4}$ ce qui, avec (6) nie la non annulation de $f'$ sur $I$. On a donc montré que

$$f' \text{ ne s'annule sur tout intervalle ouvert de longueur } > 2\sigma H^{-1/4}$$

**Q.20.** Si $f'(x_0) = 0$ alors $f(x_0)^4 = H > 0$ et donc $f''(x_0) = -2f(x_0)^3 \neq 0$. $f''$ étant continue et non nulle en $x_0$, il existe $u_1 < x_0 < u_2$ tels que $f''$ ne s'annule pas sur $]u_1, u_2[$ (restant en module par exemple plus grande que $|f''(x_0)|/2$ en utilisant la continuité avec $\varepsilon = \frac{|f''(x_0)|}{2}$). $f''$ garde alors un signe constant (non nul) sur $]u_1, u_2[$ et $f'$ est donc strictement monotone sur cet intervalle et donc injective. Comme elle s'annule en $x_0$, elle ne s'annule pas sur $]u_1, x_0[\cup]x_0, u_2[$.

**Q.21.** L'ensemble $A = \{x > x_0/\ f'(x) = 0\}$ est non vide d'après 19 ($]x_0, +\infty[$ contient un intervalle ouvert de longueur $> 2\sigma H^{-1/4}$). Il est minoré par $u_2$ et possède donc une borne inférieure $x_1 \geq u_2 > x_0$.
Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(c_n)$ d'éléments de $A$ qui converge vers $x_1$. Par continuité de $f'$, on a $f'(x_1) = \lim_{n\to+\infty} f'(a_n) = 0$.
Ainsi, $x_0$ et $x_1$ sont deux zéros consécutifs de $f'$. Sur $]x_0, x_1[$, $f'$ ne s'annule pas et il existe donc (question 18) un réel $b$ tel que

$$\forall x \in ]x_0, x_1[,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

$H^{1/4}x_0 + b$ et $H^{1/4}x_1 + b$ doivent annuler sl' et il existe des entiers $k_0, k_1$ tels que $H^{1/4}x_0 + b = (2k_0 + 1)\sigma$ et $H^{1/4}x_1 + b = (2k_1 + 1)\sigma$. $x_0 < x_1$ donne $k_0 < k_1$ et si on avait $k_0 < k_1 - 1$ alors $]x_0, x_1[$ serait de longueur $\geq 4\sigma H^{-1/4} > 2\sigma H^{-1/4}$ ce qui contredirait la non annulation de $f'$ sur $]x_0, x_1[$. Finalement $k_1 = k_0 + 1$ et

$$x_1 - x_0 = 2\sigma H^{-1/4}$$

**Q.22.** En procédant comme ci-dessus, on montre que $x_{-1} = x_0 - 2\sigma H^{-1/4}$ et on a l'existence de constantes $b$ et $c$ telles que

$$\forall x \in ]x_0, x_1[,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

$$\forall x \in ]x_{-1}, x_0[,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + c)$$

En $H^{1/4}x_0 + b$ et $H^{1/4}x_0 + c$ sl' s'annule et sl prend la même valeur ($f(x_0)$ par continuité de $f$ et sl). On en déduit que $b$ et $c$ sont égaux modulo $4\sigma$. sl étant $4\sigma$ périodique, on peut changer $c$ en $b$ en gardant l'égalité précédente. On a finalement (l'égalité en $x_0$ s'obtenant par continuité de $f$ et sl)

$$\forall x \in ]x_{-1}, x_1[,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

On définit par récurrence les suites $(x_n)$ et $(x_{-n})$, $x_{n+1}$ étant défini à partir de $x_n$ comme $x_1$ l'est à partir de $x_0$ et $x_{-n-1}$ à partir de $x_{-n}$ comme $x_{-1}$ l'est à partir de $x_0$. On montre comme ci-dessus que

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \exists\, b_k/\ \forall x \in ]x_k, x_{k+2}[,\ f(x) = H^{1/4}\texttt{sl}(H^{1/4}x + b_k)$$

En regardant la valeur aux points $x_k$ de $f$ et en utilisant la nullité de $f'$ en ces $x_k$, on montre comme plus haut que les $b_k$ sont deux à deux égaux modulo $4\sigma$ et on conclut par $4\sigma$-périodicité de sl qu'on peut les choisir égaux. On a ainsi prouvé que la relation (8) est vrait sur la réunion de tous les intervalles $]x_k, x_{k+2}[$ et celle ci vaut $\mathbb{R}$ (car $x_k = x_0 + 2k\sigma H^{-1/4}$ est de limite infinie quand $k$ tend vers l'infini).

# 4 Le calcul trigonométrique généralisé.

**Q.23.** D'après les questions 16 et 17, $\mathtt{sl}'(x)^2 + \mathtt{sl}(x)^4$ est une quantité constante. Comme $\mathtt{sl}(0) = 0$ et $\mathtt{sl}'(0) = 1$, la valeur de cette constante est 1 et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathtt{sl}'(x)^2}{1 + \mathtt{sl}(x)^2} = 1 - \mathtt{sl}(x)^2$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}(x)^2 = \frac{1 - \mathtt{sl}(x)^2}{1 + \mathtt{sl}(x)^2}$$

et il en résulte que la relation (10) est vérifiée.

**Q.24.** On va utiliser la relation (5) et la relation $(6)'$ : $(\mathtt{sl}')^2 = 1 - \mathtt{sl}^4$. Elle nous permettent de montrer que pour tout réel $x$ on a

$$\begin{aligned}
\mathtt{cl}'(x) &= \frac{\mathtt{sl}''(x)(1 + \mathtt{sl}(x)^2) - 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(x)^2}{(1 + \mathtt{sl}(x)^2)^2} \\
&= -\frac{2\mathtt{sl}(x)}{1 + \mathtt{sl}(x)^2}
\end{aligned}$$

On peut alors dériver à nouveau

$$\begin{aligned}
\mathtt{cl}''(x) &= \frac{-2\mathtt{sl}'(x) + 2\mathtt{sl}(x)^2\mathtt{sl}'(x)}{(1 + \mathtt{sl}(x)^2)^2} \\
&= \frac{2\mathtt{sl}'(x)(\mathtt{sl}(x)^2 - 1)}{(1 + \mathtt{sl}^2(x))^2} \\
&= -2\mathtt{cl}(x)^3
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la relation (10) écrite sous la forme $\mathtt{cl}(x)^2 = \frac{1 - \mathtt{sl}(x)^2}{1 + \mathtt{sl}(x)^2}$.

**Q.25.** D'après la question 22, il existe une constante $b$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}(x) = \mathtt{sl}(x + b)$$

puisque la constante $H$ associée à $\mathtt{cl}$ est $\mathtt{cl}'(0)^2 + \mathtt{cl}(0)^4 = 1$. Appliquée en $x = 0$, cette égalité donne $\mathtt{sl}(b) = 1$ et donc $b = \sigma[4\sigma]$. Par $4\sigma$ périodicité de $\sigma$ et avec la symétrie par rapport à $x = \sigma$, on a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}(x) = \mathtt{sl}(x + \sigma) = \mathtt{sl}(\sigma - x)$$

**Q.26.** On a

$$(1 + \mathtt{sl}(x)^2\mathtt{sl}(y)^2)\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) + 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}(x)^2 G(x, y) = \mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}'(y) + \mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}''(x)$$

On peut faire le même calcul en changeant les rôles de $x$ et $y$. L'identité voulue s'écrit alors

$$\mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}''(x) - 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}(y)^2 G(x, y) = \mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}''(y) - 2\mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}'(y)\mathtt{sl}(x)^2 G(x, y)$$

Compte-tenu de la relation (5), il suffit alors que

$$\mathtt{sl}(x)^2 + \mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}(y)G(x, y) = \mathtt{sl}(y)^2 + \mathtt{sl}'(y)\mathtt{sl}(x)G(x, y)$$

En tenant compte de l'expression de $G$, ceci revient à montrer que

$$(\mathtt{sl}(y)^2 - \mathtt{sl}(x)^2)(1 + \mathtt{sl}(y)^2\mathtt{sl}(x)^2) = \mathtt{sl}'(x)^2\mathtt{sl}(y)^2 - \mathtt{sl}'(y)^2\mathtt{sl}(x)^2$$

En utilisant la question 14 qui donne $\mathtt{sl}'(x)^2 = 1 - \mathtt{sl}(x)^4$, on vérifie aisément cette relation. On a donc justifié que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h\ :\ x \mapsto G(x, a-x)$. $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, a-x) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, a-x) = 0$. $h$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

**Q.27.** En particulier, pour tout $a$ et tout $t$, $G(t, a-t) = G(0, a) = \mathtt{sl}(a)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, en prenant $t = x$ et $a = x + y$, on obtient $G(x, y) = \mathtt{sl}(x+y)$.
En utilisant l'expression de $G(x, y)$ et la relation $\mathtt{sl}'(x) = (1 + \mathtt{sl}(x)^2)\mathtt{cl}(x)$, on obtient alors

$$\mathtt{sl}(x+y) = \frac{\mathtt{sl}(x)(1 + \mathtt{sl}(y)^2)\mathtt{cl}(y) + \mathtt{sl}(y)(1 + \mathtt{sl}(x)^2)\mathtt{cl}(x)}{1 + \mathtt{sl}(x)^2\mathtt{sl}(y)^2}$$

**Q.28.** En particulier, on a

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \mathtt{sl}(2y) = \frac{2\mathtt{sl}(y)\mathtt{cl}(y)(1 + \mathtt{sl}(y)^2)}{1 + \mathtt{sl}(y)^4}$$

Appliquons ceci avec $y = F(x)$ pour $x \in [-1, 1]$. Par définition de $\mathtt{sl}$, on a $\mathtt{sl}(y) = x$ et (question 14 avec $y \in [-\sigma, \sigma]$) $\mathtt{sl}'(y) = \sqrt{1 - \mathtt{sl}(y)^4} = \sqrt{1 - x^4}$. On en déduit que $\mathtt{cl}(y) = \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^2}$. On a donc

$$\forall x \in [-\sigma, \sigma],\ \mathtt{sl}(2F(x)) = \frac{2x\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^4}$$

On compose cette identité par $F$. Comme $F \circ \mathtt{sl} = Id_{[-\sigma, \sigma]}$, dès que $2F(x) \in [-\sigma, \sigma]$, on aura

$$2F(x) = F\left(\frac{2x\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^4}\right)$$

On en déduit que pou $\alpha = F^{-1}(\sigma/2)$ (qui est $> 0$), on a

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha],\ 2\int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}}$$