Mines PSI 1 - 2009

1 Préliminaires.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Par théorèmes généraux, la continuité de f entraîne celle de $T(f)$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x+1) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(x+1)\right) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(x)\right) = T(f)(x)$$

   et $T(f)$ est donc 1-périodique ce qui donne finalement $T(f) \in \mathcal{C}^0$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0$; pour tout t on a $\|f(t)\| \leq \|f\|_\infty$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |T(f)(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x/2)| + |f(x)|\right) \leq \|f\|_\infty$$

   c'est à dire $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Par passage à la borne supérieure,

$$\sup_{\|f\|_\infty = 1} \|T(f)\|_\infty \leq 1$$

   De plus, pour $f = e_0$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ ce qui montre que

$$\max_{\|f\|_\infty = 1} \|T(f)\|_\infty = 1$$

3. Soit $f \in H^\circ$; le changement de variable $u = x/2$ donne

$$\int_0^1 f(x/2)\ dx = 2\int_0^{1/2} f(u)\ du$$

   De même, en posant $u = (x+1)/2$ on a

$$\int_0^1 f((x+1)/2)\ dx = 2\int_{1/2}^1 f(u)\ du$$

   En combinant ces égalités, on a alors

$$\int_0^1 T(f)(x)\ dx = \int_0^1 f(u)\ du = 0$$

   et donc $T(f) \in H^\circ$. H° est ainsi stable par T.

4. On remarque tout d'abord que $e_0 \notin H^\circ$ et comme H° est un hyperplan, on a donc $H^\circ \oplus D = \mathcal{C}^0$ et P est bien définie. Plus précisément, on a

$$\forall f \in \mathcal{C}^0,\ \int_0^1 \left(f(x) - \int_0^1 f\right)\ dx = 0$$

   ce qui montre que $f - \left(\int_0^1 f\right) e_0 \in H^\circ$ et exhibe la décomposition de f sur H° et D et indique que

$$P(f) = \left(\int_0^1 f\right) e_0$$

2 Fonctions trigonométriques.

5. On a

$$\begin{aligned} T(e_k)(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{2ik\pi+\frac{x}{2}} + e^{2ik\pi+\frac{x+1}{2}}\right) \\ &= \frac{e^{ik\pi x}}{2}(1+e^{ik\pi x}) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ T(e_{2k+1}) = 0 \ \text{ et } \ T(e_{2k}) = e_k$$

Chaque élément d'une famile génératrice de E_n est donc envoyé dans E_n par T et ceci indique que E_n est stable par l'application linéaire T (et même $T(E_n) = E_{E(n/2)}$).
Par ailleurs, $\int_0^1 e_k$ est nul si $k \neq 0$ et vaut 1 si $k = 0$ ainsi

$$\forall k \neq 0,\ P(e_k) = 0 \ \text{ et } \ P(e_0) = e_0$$

De façon similaire, E_n est stable par P (d'ailleurs, $P(E_n) = E_0 \subset E_n$)

6. La matrice de T_2 dans la base $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ (c'est une famille génératrice de E_2 mais elle est aussi libre puisqu'elle est orthonormée pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 \overline{f}g$) est

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le spectre de T_2 contient donc 0 et 1. M_2 est de rang 3 et $\ker(M_2)$ est donc de dimension 2. $M_2 - I_5$ est de rang 4 et $\ker(M_2 - I_5)$ est donc de dimension 1. T_2 n'est donc pas diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $3 \neq 5$).

7. Procédons par récurrence sur l'entier n.
   - Pour $n = 1$, $k = 1$. On a $T_1 = P_1$ (ces deux applications linéaires agissent de la même façon sur la base (e_0, e_1, e_{-1}). Ainsi, pour $p \geq 1$, $T_1^p = P_1^p = P_1$ (grâce à $P_1^2 = P_1$).
   - Soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. Soit k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leq n < 2^k$. $k' = k-1$ vérifie alors $2^{k'-1} \leq E(n/2) < 2^{k'}$ et par hypothèse de récurrence,

     $$\forall q \geq k-1,\ T_n^q = P_n$$

     Soit $p \geq k$; on a

     $$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = T_{n+1}^{p-1}(T(f))$$

     Or, pour $f \in E_{n+1}$, $T(f) \in E_{E(\frac{n+1}{2})} \subset E_n$ et l'identité précédente s'écrit donc

     $$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = T_n^{p-1}(T(f))$$

     Avec l'hypothèse au rang n, on a donc

     $$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = P_n(T(f))$$

     Enfin, comme $\int_0^1 f = \int_0^1 T(f)$ (vu en question 3) et avev la formule de P (question 4) on a $P(T(f)) = P(f)$ et ainsi $P_n(T(f)) = P(f)$ ce qui vaut $P_{n+1}(f)$ (pour $f \in E_{n+1}$). On a ainsi

     $$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = P_{n+1}(f)$$

     ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

8. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Par définition

$$c_k(T(f)) = \int_0^1 e^{-2i\pi kx} T(f)(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x}{2})\, dx + \int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x+1}{2})\, dx\right)$$

On pose $u = x/2$ dans la première intégrale et $u = (x+1)/2$ dans la seconde pour obtenir

$$c_k(T(f)) = \int_0^{1/2} e^{-i4k\pi u} f(u)\, du + \int_{1/2}^1 e^{-i4k\pi u} f(u)\, du = c_{2k}(f)$$

9. Si $T(f) = 0$ alors la question précédente indique que $\forall k,\ c_{2k}(f) = 0$. Réciproquement, si cette propriété est vérifiée alors tous les coefficients de Fourier de $T(f)$ sont nuls. Comme $T(f)$ est continue, c'est la limite de sa série de Fourier au sens de la moyenne quadratique. Comme les sommes partielles de cette dernière sont nulle, $T(f)$ l'est aussi.
   $\ker(T)$ est donc constitué des éléments de E dont les coefficients de Fourier d'indices pairs sont nuls.
   La question posée par l'énoncé est très vague et je trouve difficile de savoir ce qui était attendu.

3 Fonctions höldériennes.

10. Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$. On a (inégalité triangulaire)

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \le \frac{1}{2}\left(|f(\frac{x}{2} - f(\frac{y}{2})| + |f(\frac{x+1}{2}) - f(\frac{y+1}{2})|\right)$$

Par définition de $m_\alpha(f)$, on en déduit que

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \le \frac{1}{2} m_\alpha(f)\left(|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}|^\alpha + |\frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2}|^\alpha\right) = \frac{m_\alpha(f)}{2^{1+\alpha}}|x-y|^\alpha$$

$T(f)$ (qui est dans $\mathcal{C}^0$) est donc dans $\mathcal{C}^\alpha$ avec $m_\alpha(T(f)) \le \frac{m_\alpha(f)}{2^{1+\alpha}}$ et $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par T.

11. D'après la question précédente,

$$\forall f \in \mathcal{C}^\alpha,\ \|T_\alpha(f)\|_\alpha \le \frac{m_\alpha(f)}{2^{1+\alpha}} + \|T(f)\|_\infty$$

Avec la question 2 et comme $2^{1+\alpha} \ge 1$, on a donc

$$\forall f \in \mathcal{C}^\alpha,\ \|T_\alpha(f)\|_\alpha \le m_\alpha(f) + \|f\|_\infty = \|f\|_\alpha$$

On note que $e_0 \in \mathcal{C}^\alpha$ avec $m_\alpha(e_0) = 0$ et donc $\|e_0\|_\alpha$. Comme $T(e_0) = e_0$, l'inégalité qui précède est une égalité pour e_0. On a donc

$$\max_{\|f\|_\alpha = 1} \|T_\alpha(f)\|_\alpha = 1$$

12. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\lambda^k e_{2^k}(x)| \le |\lambda|^k$$

Le majorant est indépendant de x et est, si $|\lambda| < 1$, le terme général d'une série (géométrique) convergente. Dans ce cas, $\sum(\lambda^k e_{2^k})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note

$$f_\lambda\ :\ x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e^{2^{k+1} i\pi x}$$

Cette fonction est continue comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues et 1-périodique car limite simple d'une suite de fonctions 1-périodiques. On a ainsi

$$f_\lambda \in \mathcal{C}^0$$

La question 5 permet de voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T(S_n) = \lambda S_{n-1}$$

La question 2 montre que T est une application linéaire continue au sens de $\|.\|_\infty$. La suite $(T(S_n))$ est donc convergente au sens de $\|.\|_\infty$ vers $T(f_\lambda)$. Par unicité des limites, on a alors

$$T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

13. On suppose $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$. On veut trouver une constante M telle que

$$\forall x \neq y,\ |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

Il suffit pour cela de trouver une constante M_1 valable quand $|x-y| \geq 1$ et une autre M_2 valable quand $|x-y| \leq 1$ ($M = \max(M_1, M_2)$ convient alors). On distingue donc les cas.

- $M_1 = 2\|f_\lambda\|_\infty$ convient de manière immédiate (si $|x-y| \geq 1$ alors $|x-y|^\alpha \geq 1$ et $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq M_1 \leq |x-y|^\alpha$).
- Supposons $|x-y| \leq 1$; il existe alors n (qui dépend de x et y) tel que $2^{-n-1} < |x-y| \leq 2^{-n}$. Comme $|e_p(x) - e_p(y)| \leq 2$, on a (les sommes écrites existent)

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k = \frac{2}{1-|\lambda|}|\lambda|^{n+1} \leq \frac{2}{1-|\lambda|}2^{-\alpha(n+1)}$$

Comme $2^{-(n+1)} \leq |x-y|$ on a $2^{-(n+1)\alpha} \leq |x-y|^\alpha$ (croissance de l'élévation à la puissance $\alpha > 0$) et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \leq \frac{2}{1-|\lambda|}|x-y|^\alpha$$

Par ailleurs, comme $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$ on a aussi

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k 2^{k+1}\pi|x-y| \leq 2\pi|x-y|\sum_{k=0}^{n}(2^{1-\alpha})^k$$

$2^{1-\alpha} \in [0,1[$ et $(2^{1-\alpha})^k$ converge donc. De plus, $|x-y| \leq |x-y|^\alpha$ (car $|x-y| \leq 1$ et $\alpha \in [0,1]$) et on a donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \leq M_2|x-y|^\alpha \quad \text{où} \quad M_2 = 2\pi\sum_{k=0}^{+\infty}(2^{1-\alpha})^k$$

On notera que M_2 est bien indépendante de x et y.

On a atteint l'objectif fixé et prouvé que $f_\lambda \in \mathcal{C}^\alpha$.

14. On a déjà vu que $\mathcal{C}^\alpha$ et H° sont stables par T. Il en résulte immédiatement que l'intersection est aussi stable par T et donc par T_α (T et T_α agissent de même sur $\mathcal{C}^\alpha$).
15. On montre par récurrence que la propriété

$$\forall f \in \mathcal{C}^0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T^n(f)(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$$

est vraie pour tout entier n.

- Pour $n = 0$, le résultat est immédiat (l'égalité s'écrit $f(x) = f(x)$).
- Soit $n \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Soit $f \in \mathcal{C}^0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} T(f)(k2^{-n} + x2^{-n}) \\ &= 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(f(k2^{-n-1} + x2^{-n-1}) + f(k2^{-n-1} + x2^{-n-1} + \frac{1}{2}) \right) \end{aligned}$$

Le changement d'indice $j = k + 2^n$ donne

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n-1} + x2^{-n-1} + \frac{1}{2}) = \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} f(j2^{-n-1} + x2^{-n-1})$$

et on peut alors regrouper les sommes pour obtenir

$$T^{n+1}(f)(x) = 2^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(k2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)})$$

c'est à dire le résultat au rang $n + 1$.

16. Soit $f \in \mathcal{C}^0$; soit $x \in \mathbb{R}$; par 1-périodicité et relation de Chasles, on a

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x}{2^n}+1} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x2^{-n}+k2^{-n}}^{x2^{-n}+(k+1)2^{-n}} f(t)\, dt$$

On pose $x_k = x2^{-n} + k2^{-n}$ pour plus de lisibilité. Avec la question précédente, on a donc

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \frac{f(x_k)}{2^n} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt \right|$$

Comme $x_{k+1} - x_k = 1/2^n$, ceci peut aussi s'écrire

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\, dt \right|$$

Si $f \in \mathcal{C}^\alpha$, la positivité de l'intégrale donne

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\, dt \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} m_\alpha(f)|x_k - t|^\alpha\, dt$$

Pour $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $|x_k - t| \leq 2^{-n}$ et ainsi

$$|T^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha} \int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x}{2^n}+1} dt = m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout x, on a finalement (on peut écrire T ou T_α puisque l'on est dans $\mathcal{C}^\alpha$)

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$$

17. Si $f \in H^\alpha$ alors $\int_0^1 f = 0$. La question précédente donne alors

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\infty \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

Par ailleurs, l'application répétée de la formule vue en question 10 donne

$$m_\alpha(T_\alpha^n(f)) \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^{n(\alpha+1)}}$$

On en déduit que

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha} + m_\alpha(f) 2^{-n(\alpha+1)} \leq 2^{1-n\alpha} m_\alpha(f) \leq 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

18. On a vu en question 12 et 13 que si $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$ alors λ est valeur propre de T_α (et $f_\lambda \in \mathcal{C}^\alpha$ est vecteur propre, cette fonction étant non nulle car $f_\lambda(0) = \frac{1}{1-\lambda} \neq 0$ et vérifiant $T_\alpha(f_\lambda) = f_\lambda$)). Par ailleurs, 1 est aussi valeur propre (vecteur propre e_0 qui est bien dans $\mathcal{C}^\alpha$).
Réciproquement, soit λ une valeur propre de T_α différente de 1. Il existe $f \in \mathcal{C}^\alpha$ non nulle telle que $T_\alpha(f) = \lambda f$. g peut se décomposer sur D et H° en $f = \alpha e_0 + g$. $T(f) = \lambda f$ donne alors $\lambda \alpha e_0 + \lambda g = \alpha e_0 + T(g)$. Par unicité de la décomposition (on sait que $T(g) \in H^\circ$), on a donc $\lambda \alpha e_0 = \alpha e_0$ et $T(g) = \lambda g$. Comme $\lambda \neq 1$, on a $\alpha = 0$ et $f = g \in H^\alpha$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda^n| \|f\|_\alpha = \|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

et donc (comme $\|f\|_\alpha > 0$ et par croissance de l'élévation à la puissance $1/n$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda| \leq 2^{1/n} 2^{-\alpha}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$. Les seules valeurs propres possibles sont bien celles annoncées.