MINES - PONTS 2004, PSI, épreuve 2

corrigé par François DEHAME

Première Partie

Quelques propriétés

1. On a $U^0 = I \in E$ puis, si $U^n \in E$ pour un entier naturel n donné, alors $U^n = a_n I + b_n J$ et par conséquent, $U^{n+1} = a_n\, U + b_n\, JU$, mais on vérifie que $JU = J^2 + \frac{1}{2}J = \frac{5}{4}I + \frac{1}{2}J \in E$; comme $U = J + \frac{1}{2}I \in E$, on a ainsi prouvé que $U^{n+1} \in E$ et la propriété est démontrée par récurrence.

2. On a

$$U_{n+2} = f_{n+2}\, J + \frac{1}{2} g_{n+2}\, I = \left(f_{n+1}\, J + \frac{1}{2} g_{n+1}\, I\right) + \left(f_n\, J + \frac{1}{2} g_n\, I\right) = U_{n+1} + U_n\ .$$

Caractérisation de la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; quelques conséquences

3. On a $U_0 = I = U^0$, $U_1 = U = U^1$ et $U_2 = J + \frac{3}{2}I = U^2$. On constate que $U^2 = U + I$ donc, pour tout entier naturel n, on a $U^{n+2} = U^{n+1} + U^n$. Les deux suites de matrices (U_n) et (U^n) vérifient la même relation de récurrence et ont la même initialisation ($U^0 = U_0$ et $U^1 = U_1$), donc $U^n = U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a $\det U_n = \det(U^n) = (\det U)^n = (-1)^n$. Comme $U_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_n & f_n\sqrt{5} \\ f_n\sqrt{5} & g_n \end{pmatrix}$, on a donc

$$(-1)^n = \det(U_n) = \frac{1}{4}\left(g_n^2 - 5f_n^2\right)\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. On a $U_{p+q} = U^{p+q} = U^p\, U^q = U_p\, U_q$. En explicitant ces matrices comme dans la question **4.** ci-dessus, on obtient les relations

$$f_{p+q} = \frac{1}{2}\left(f_p\, g_q + f_q\, g_p\right) \qquad ; \qquad g_{p+q} = \frac{1}{2}\left(5\, f_p\, f_q + g_p\, g_q\right)\ .$$

Inverse des matrices U_n

6. On inverse la matrice U_n et on exprime le résultat comme combinaison linéaire de I et de J (ou bien on recherche l'inverse sous la forme $aI + bJ$ et on résout un système). Bref, on trouve $U_n^{-1} = (-1)^n\,(-f_n\, J + \frac{1}{2}\, g_n\, I)$. Je ne comprends pas la deuxième partie de la question...

Des polynômes annulés par la matrice U

7. On remarque que $P_2 = X^2 - X - 1$, donc l'assertion à démontrer est trivialement vérifiée pour $n = 2$. Puis

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= X^{n+1} - f_{n+1}\, X - f_n = X^{n+1} - (f_n + f_{n-1})\, X - f_n \\ &= X^{n+1} - f_n\, X^2 - f_{n-1}\, X + f_n\, X^2 - f_n\, X - f_n \\ &= X\, P_n(X) + f_n\, P_2(X)\ . \end{aligned}$$

L'assertion $X^2 - X - 1 \mid P_n$ se démontre alors tranquillement par récurrence.

8. $\chi_U(X) = X^2 - X - 1 = P_2(X)$.

9. On a $\chi_U(U) = 0$ (vérification immédiate... ou Cayley-Hamilton!). Comme χ_U divise P_n, on déduit $P_n(U) = 0$, c'est-à-dire $C_n = U^n - f_n\, U - f_{n-1}\, I = 0$.

Divisibilité du polynôme $X^{2n} - g_n\, X^n + (-1)^n$ par $X^2 - X - 1$

10. On a $\chi_{U_n}(X) = \left(\frac{1}{2}g_n - X\right)^2 - \frac{5}{4}f_n^2 = X^2 - g_n\, X + (-1)^n$. On a $\chi_{U_n}(U_n) = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton, donc

$$U^{2n} - g_n\, U^n + (-1)^n\, I = U_n^2 - g_n\, U_n + (-1)^n\, I = \chi_{U_n}(U_n) = 0\ .$$

Notons que l'on peut trouver cette relation par le calcul direct en utilisant les relations obtenues à la question **5.**.

11. Le quotient Q est de degré $2n-2$, et le reste R est de degré strictement inférieur à 2. Le polynôme $A_n = X^{2n} - g_n\, X^n + (-1)^n$ annule U d'après la question précédente : $A_n(U) = 0$. Comme le polynôme $X^2 - X - 1$ annule aussi U, le polynôme R appartient aussi à l'idéal des polynômes annulateurs de la matrice U. Posons $R(X) = aX + b$; on a donc $aU + bI = 0$ et, la famille (I, U) étant libre, on en tire $a = b = 0$, donc $R = 0$, ce qui signifie que $X^2 - X - 1$ divise le polynôme A_n.

Deuxième Partie

Un calcul de sommes

12. À partir de la relation établie à la question **2.**, on a facilement

$$\begin{aligned} U_{2n+1} &= U_{2n} + U_{2n-1} = U_{2n} + U_{2n-2} + U_{2n-3} = \cdots \\ &= U_{2n} + U_{2n-2} + \cdots + U_4 + U_2 + U_1 \\ &= S_n + (U_1 - U_0) = S_n + U - I\ , \end{aligned}$$

ou encore $S_n = U_{2n+1} + I - U$. En prenant le coefficient d'indices $(1,1)$, on obtient

$$\beta_n = g_{2n+1} + 1\ ;$$

avec le coefficient d'indices $(1,2)$, on trouve

$$\alpha_n = f_{2n+1} - 1\ .$$

Détermination des éléments t_n de la suite T à l'aide des réels f_n et g_n

13. Une division euclidienne donne

$$X^6 - 4X^3 - 1 = (X^4 + X^3 + 2X^2 - X + 1)(X^2 - X - 1)\ .$$

14. Le polynôme $F = X^6 - 4X^3 - 1$ appartient donc à l'idéal des polynômes annulateurs de la matrice U, et donc aussi le polynôme $X^p F = X^{6+p} - 4X^{3+p} - X^p$, donc $U^{6+p} = 4U^{3+p} + U^p$.

15. Vue l'expression de la matrice $U_n = U^n$ donnée à la question **4.**, cela ne devrait pas trop poser de problème.

16. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des suites réelles $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+2} = 4\, x_{n+1} + x_n\ .$$

Alors $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de dimension deux (car l'application de $\mathcal{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par $X \mapsto (x_0, x_1)$ est linéaire, et il résulte du principe de récurrence qu'elle est bijective). Les suites U et V de termes généraux respectivement $u_n = f_{3n}$ et $v_n = g_{3n}$ appartiennent à $\mathcal{R}$ et l'observation des deux premiers termes montre que U et V sont linéairement indépendantes, donc (U, V) est une base de $\mathcal{R}$.

La suite T appartient à $\mathcal{R}$, donc il existe des réels λ et μ tels que $T = \lambda U + \mu V$. On détermine λ et μ grâce aux termes d'indices 0 et 1 : $\lambda = 1$ et $\mu = \dfrac{1}{2}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n = u_n + \frac{1}{2}\, v_n = f_{3n} + \frac{1}{2}\, g_{3n} \,.$$

Troisième Partie

17. On a $\det(I - xU) = -(x^2 + x - 1)$, donc $I - xU$ est inversible pour tout réel x différent des racines $\alpha = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ de ce polynôme.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$, on recherche $(I - xU)^{-1}$ sous la forme $aI + bU$:

$$(I - xU)(aI + bU) = (a - xb)I + \big(-xa + (1-x)b\big)\, U \ ;$$

la famille (I, U) étant libre, on est amené à un système de deux équations à deux inconnues. Tous calculs faits,

$$(I - xU)^{-1} = \frac{1}{x^2 + x - 1}\,\big[(x-1)\, I - x\, U\big] \,.$$

18. La suite de matrices $(x^n U_n)_n$ tend vers 0 si et seulement si les suites réelles $(f_n x^n)$ et $(g_n x^n)$ tendent vers zéro. Explicitons donc les coefficients f_n et g_n (*y a-t-il plus simple ?*). Ces deux suites satisfont une équation de récurrence linéaire d'ordre deux (à coefficients constants) ayant pour équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$, donc leurs termes généraux sont de la forme $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où r_1 et r_2 sont les racines (ici distinctes) de l'équation caractéristique. Les coefficients λ et μ s'obtiennent grâce aux termes d'indices 0 et1.

Le calcul, classique et laissé au lecteur, fournit

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ ;$$

$$g_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \,.$$

On a donc $f_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $g_n \sim \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini d'où l'on déduit que les séries entières $\sum f_n x^n$ et $\sum g_n x^n$ ont toutes deux pour rayon de convergence $\rho = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \beta$. On sait que le terme général d'une série entière de rayon de convergence ρ tend vers zéro lorsque $|x| < \rho$, tend vers l'infini en module lorsque $|x| > \rho$, une indétermination persistant pour $|x| = \rho$; des équivalents obtenus plus haut, on déduit que les suites $(f_n \rho^n)$ et $(g_n \rho^n)$ ne tendent pas vers zéro.

En conclusion, la suite de matrices $(x^n U_n)$ tend vers 0 si et seulement si $|x| < \rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

19. Pour $|x| < \rho$, la matrice $I - xU$ est inversible. De l'identité remarquable

$$(I + xU + x^2U^2 + \cdots + x^nU^n)(I - xU) = I - x^{n+1}U^{n+1} \ ,$$

on tire $\Sigma_n(x) = (I - x^{n+1}U^{n+1})\,(I - xU)^{-1} = (I - x^{n+1}U_{n+1})\,(I - xU)^{-1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}U_{n+1} = 0$, la continuité du produit matriciel (application bilinéaire en dimension finie) permet de passer à la limite, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n(x) = (I - xU)^{-1} = \frac{1}{x^2 + x - 1}\,\big[(x-1)I - xU\big] \ .$$

20. On a déjà obtenu la valeur exacte de ρ : $\rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

On a $\Sigma_n(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} g_kx^k & \sqrt{5}f_kx^k \\ \sqrt{5}f_kx^k & g_kx^k \end{pmatrix}$. Pour $|x| < \rho$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B(x) & \sqrt{5}\,A(x) \\ \sqrt{5}\,A(x) & B(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2+x-1)}\begin{pmatrix} x-2 & -x\sqrt{5} \\ -x\sqrt{5} & x-2 \end{pmatrix} \ .$$

En conclusion, pour $|x| < \rho$, on a $A(x) = -\dfrac{x}{x^2+x-1}$ et $B(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x-1}$.