Corrigé MINES-PONTS 2004 PC 1

1. f est somme d'une série entière de rayon de CV $R \geq 1$; elle est donc de classe C^∞ sur]-1,1[. Sur [0,1[on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \geq 0$ car $a_n \geq 0$; de plus $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1)$: f est donc croissante sur [0,1].
Sur [0,1[on a $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \geq 0$: f est donc convexe sur [0,1[.

2. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec convergence normale sur [0,1] puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge : f est donc continue sur [0,1].

3. G est dans S car $g_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$. $\widehat{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1/2}{1-x/2} = \dfrac{1}{2-x}$. E^q est trivialement dans S et $\widehat{E^q}(x) = x^q$. V est dans S car $v_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a}{n^2} = 1/2 + 1/2 = 1$. $\widehat{V}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a x^{n-1}}{n} = -\dfrac{a \ln(1-x)}{x}$ pour $x \in]-1,1[$. On en déduit sur cet intervalle $\widehat{V}(x) = 1/2 - a\int_0^x \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

4. Puisque $a_0 = f(0) = 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x = x$. Il y a deux cas : soit $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ et alors $f(x) = x$, soit $a_n > 0$ pour un $n \geq 2$ d'où $a_n x^n < a_n x$ et donc $f(x) < x$ sur]0,1[.
Supposons maintenant $a_0 > 0$. Il y a encore deux cas : soit $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ et alors $f(x) = a_0 + (1-a_0)x > x$ sur [0,1[, soit $a_n > 0$ pour un $n \geq 2$ d'où $f''(x) > 0$ sur]0,1[: f est strictement convexe, il y a au maximum deux points de la courbe sur la droite $y = x$; puisque $f(1) = 1$, il y a au plus un $x \in]0,1[$ tel que $f(x) = x$.

5. Soit $U \in S$ et $f = j(U)$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 1$, le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ vérifie $R \geq 1$; de plus, $f^{(n)}(0) = u_n n! \geq 0$. f est donc bien dans F. Réciproquement, pour $f \in F$, la suite (a_n) est unique car $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$; elle est dans S puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ et $a_n \geq 0$. j est donc bien une bijection de S sur F.

6. On a clairement $w_n \geq 0$. La série de terme général w_n est le produit de Cauchy des séries convergentes de termes généraux positifs u_n et v_n ; elle est donc convergente et sa somme est égale au produit des deux sommes, soit 1 . $U * V$ est donc bien dans S.

7. La série entière $(\sum w_n x^n)$ est le produit de Cauchy des séries entières $(\sum u_n x^n)$ et $(\sum v_n x^n)$. On a donc $j(U * V) = j(U)j(V)$.

8. Utilisons la bijection j^{-1} ; pour f, g dans F , $j^{-1}(fg) = j^{-1}(f) * j^{-1}(g)$; j^{-1} est donc un morphisme de $(F, .)$ sur $(S, *)$. On en déduit que la loi $*$ est associative, commutative et a pour élément neutre $j^{-1}(1) = E^0$.

9. B^p est dans S puisque $p > 0$, $1-p > 0$ et $p + (1-p) = 1$. Γ^p est dans S puisque $(1-p)p^n > 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)p^n = \dfrac{1-p}{1-p} = 1$ (série géométrique). Π^λ est dans S puisque $\lambda > 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} = 1$.
$\widehat{B}^p(x) = 1 - p + px$, $\widehat{\Gamma}^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)p^n x^n = \dfrac{1-p}{1-px}$ et $\widehat{\Pi}^\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} x^n = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-x)}$.

10. $j(B^{p*q})(x) = (j(B^p)(x))^q = (1-p+px)^q = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n}(1-p)^{q-n}p^n x^n$ donc B^{p*q} a pour terme général $\beta_n^{p*q} = \binom{q}{n}(1-p)^{q-n}p^n$ pour $n \leq q$ et 0 pour $n > q$.
$j(\Gamma^{p*q})(x) = (j(\Gamma^p)(x))^q = \left(\dfrac{1-p}{1-px}\right)^q = (1-p)^q \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-q}{n}(-px)^n = (1-p)^q \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{n}(px)^n$ donc Γ^{p*q} a pour terme général $\gamma_n^{p*q} = (1-p)^q \binom{n+q-1}{n} p^n$.
$j(\Pi^{\lambda*q})(x) = (j(\Pi^\lambda)(x))^q = (\mathrm{e}^{-\lambda(1-x)})^q = \mathrm{e}^{-\lambda q(1-x)}$. $\Pi^{\lambda*q} = \Pi^{\lambda q}$ a donc pour terme général $\pi_n^{\lambda*q} = \dfrac{(\lambda q)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda q}$.

11. $\beta_n^{(\lambda/q)*q} = \binom{q}{n}\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)^{q-n}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^n = \dfrac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\,\mathrm{e}^{(q-n)\ln(1-\lambda/q)}\,\dfrac{\lambda^n}{q^n}$. Quand q tend vers l'infini, $(q-n)\ln\left(1-\dfrac{\lambda}{q}\right)$ a pour limite $-\lambda$ donc $\beta_n^{(\lambda/q)*q}$ a pour limite $\dfrac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \pi_n^\lambda$.

12. Puisque $u_n^q \geq 0$, $v_n = \lim\limits_{q\to+\infty} u_n^q \geq 0$. Pour tout $N > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^q \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^q = 1$ donc en faisant tendre q vers l'infini, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n \leq 1$. La série de terme général v_n converge et sa somme est inférieure ou égale à 1.

Si on prend $U^q = \Pi^{1+q}$, on obtient $v_n = \lim\limits_{q\to+\infty} \dfrac{(1+q)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-(1+q)} = 0$.

13. Supposons $r \leq s$; puisque $0 \leq u_n n^r \leq u_n n^s$ la convergence de la série de terme général $u_n n^s$ entraine la convergence de la série de terme général $u_n n^r$; on a donc $S_s \subset S_r$. Par exemple, $S_2 \subset S_1$.

14. φ est clairement symétrique et bilinéaire (pour Y fixé, $X \mapsto \varphi(X,Y)$ est une forme linéaire). De plus, $\varphi(X,X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2 \geq 0$ et n'est nul que si chaque $a_i x_i^2$ est nul soit $X = 0$ puisque $a_i > 0$. φ est donc bien un produit scalaire.

15. Pour U dans S_2, U est aussi dans S_1 ; donc $M(U)$ existe et $V(U)$ aussi. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique aux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^N$ définis par $x_n = \sqrt{u_n}$ et $y_n = n\sqrt{u_n}$: $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n u_n\right)^2 = (X|Y)^2 \leq (X|X)(Y|Y) = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 u_n\right) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 u_n$ puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n \leq 1$. On en déduit en faisant tendre N vers l'infini : $M(U)^2 \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n$ donc $V(U) \geq 0$.

16. Pour $x \in [0,1[$ on a $\widehat{U}'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$; puisque $n u_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n = M(U)$ il y a convergence normale sur [0,1] et donc $\widehat{U}'$ est continue sur [0,1] : $\widehat{U}'(1) = M(U)$. De même, pour $x \in [0,1[$ on a $\widehat{U}''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2}$; puisque $n(n-1)u_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)u_n = V(U) + M(U)^2 - M(U)$ il y a convergence normale sur [0,1] et donc $\widehat{U}''$ est continue sur [0,1] : $\widehat{U}''(1) = V(U) + M(U)^2 - M(U)$.

17. Soit la fonction g définie par $g(x) = \widehat{U}(x) - 1 - \widehat{U}'(1)(x-1) - \frac{1}{2}\widehat{U}''(1)(x-1)^2$; g est de classe C^2 sur $[0,1]$, $g'(x) = \widehat{U}'(x) - \widehat{U}'(1) - \widehat{U}''(1)(x-1)$ et $g''(x) = \widehat{U}''(x) - \widehat{U}''(1)$. On vérifie $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$ et $|g''(t)| = \widehat{U}''(1) - \widehat{U}''(t) \leq \widehat{U}''(1) - \widehat{U}''(x) = \varepsilon(x)$ puisque $\widehat{U}''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n t^{n-2} = \widehat{U}''(t) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n = \widehat{U}''(1)$ pour $0 < x < t < 1$. On obtient par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction g sur l'intervalle $[x,1]$: $|g(x)| \leq \frac{1}{2}(x-1)^2 \sup\limits_{t\in[x,1]} |g''(t)| \leq \dfrac{1}{2}(x-1)^2\varepsilon(x)$.

18. La suite B^p est dans S_2 puisque $\beta_n^p = 0$ pour $n \geq 2$. Γ^p est dans S_2 puisque $n^2\gamma_n^p = n^2(1-p)p^n = o(1/n^2)$. Π^λ est dans S_2 puisque $n^2\pi_n^\lambda = n^2\,\dfrac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = o(1/n^2)$.

19. On calcule immédiatement : $M(B^p) = p$ et $V(B^p) = p - p^2$.
Pour $U = \Gamma^p$, $\widehat{U}(x) = \dfrac{1-p}{1-px}$ donc $\widehat{U}'(x) = \dfrac{p(1-p)}{(1-px)^2}$ et $M(\Gamma^p) = \widehat{U}'(1) = \dfrac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \dfrac{p}{1-p}$.
$\widehat{U}''(x) = \dfrac{2p^2(1-p)}{(1-px)^3}$ d'où $V(\Gamma^p) = \widehat{U}''(1) + M(\Gamma^p) - M(\Gamma^p)^2 = \dfrac{2p^2(1-p)}{(1-p)^3} + \dfrac{p}{1-p} - (\dfrac{p}{1-p})^2 = \dfrac{p}{(1-p)^2}$.
Pour $U = \Pi^\lambda$, $\widehat{U}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-x)}$ donc $\widehat{U}'(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda(1-x)}$ et $\widehat{U}'(x) = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda(1-x)}$. On en déduit $M(\Pi^\lambda) = \widehat{U}'(1) = \lambda$ et $V(\Pi^\lambda) = \widehat{U}''(1) + M(\Pi^\lambda) - M(\Pi^\lambda)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$