Mines-Ponts PSI 2001 — épreuve 2 — 3 heures

PARTIE I

Question I.1

I.1.a. Sur l'intervalle $]-R, R[$, on peut écrire :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \quad f'_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$
$$x f'_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n, \quad x f''_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n,$$

et les propriétés classiques des séries entières permettent l'identification terme à terme, ce qui fournit les relations : $a_1 = \lambda$ et $\forall n \geqslant 1, n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - na_n = \lambda a_n$, et finalement la récurrence espérée : $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_n = \dfrac{\lambda + n - 1}{n^2} a_{n-1}$. On résout facilement :

$$\forall n \geqslant 1, a_n = \frac{1}{n!^2} \prod_{k=1}^{n} (\lambda - 1 + k).$$

En particulier, si $\lambda = 1$, $a_n = 1/n!$ et $f_1 = \exp$; si $\lambda = 0$, $a_n = 0$ et $f_0 = 1$; si $\lambda = -1$, $a_n = 0$ si $n \geqslant 2$ et $f_{-1} : x \mapsto 1 - x$; si $\lambda = -2$, $a_n = 0$ si $n \geqslant 3$ et $f_{-2} : x \mapsto 1 - 2x + \dfrac{1}{2}x^2$.

I.1.b. f_λ est polynôme si et seulement si $\lambda \in -\mathbb{N}$. Si $\lambda = -p \in -\mathbb{N}$, f_{-p} est de degré p et de coefficient dominant égal à $(-1)^p/p!$.

I.1.c. Si $\lambda \notin -\mathbb{N}$, les coefficients a_n sont tous non nuls et comme $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \dfrac{\lambda + n}{(n+1)^2} = 0$, le rayon de convergence de la série entière est $R = +\infty$.

Question I.2

I.2.a. On a vu que la fonction exponentielle est solution sur tout $\mathbb{R}$ de E_1. Cherchons les solutions sur la demi-droite $]0, +\infty[$ qui sont de la forme $y(x) = z(x)e^x$ où z est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$(E_1) \iff x(z'' + 2z' + z) + (1-x)(z' + z) - z = 0 \iff xz'' + (x+1)z' = 0 \iff z'(x) = \alpha e^{-x}/x,$$

où α est une constante arbitraire.
On en déduit la solution générale souhaitée :

$$f^+_{\alpha,\beta} : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longmapsto \alpha e^x \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \beta e^x, \end{cases}$$

où α et β sont des réels arbitraires.

I.2.b. Une étude analogue conduit à la solution générale (où γ et δ sont des réels arbitraires) :

$$f^-_{\gamma,\delta} : \begin{cases}]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longmapsto \gamma e^x \displaystyle\int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \delta e^x = \gamma e^x \int_1^{-x} \frac{e^u}{u}\, du + \delta e^x. \end{cases}$$

I.2.c. Pour trouver une solution sur $\mathbb{R}$ il faut raccorder les solutions trouvées précédemment.
Or $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -\infty$ car $\dfrac{e^{-t}}{t} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{t}$ et un raccord impose $\alpha = 0$.
De façon analogue, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \int_1^{-x} \frac{e^u}{u}\, du = -\infty$ et un raccord impose $\gamma = 0$.
Finalement les seules solutions définies sur tout $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les $x \mapsto \alpha e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Question I.3

I.3.a. g_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout x réel, $f_\lambda(x) = e^x g_\lambda(-x)$, on a $f'_\lambda(x) = e^x(g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x))$ et $f''_\lambda(x) = e^x(g''_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g_\lambda(-x))$, et remplaçant dans (E_λ) et simplifiant par l'exponentielle jamais nulle, on obtient l'équation différentielle vérifiée par g_λ en remplaçant x par $-x$: $xy'' + (1-x)y' + (\lambda - 1)y$, où l'on reconnaît $E_{1-\lambda}$.

I.3.b. D'après ce qui précède et l'unicité admise par l'énoncé à la fin de la question I.1.c, il suffit de vérifier qu'en 0, la valeur prise par $e^x f_\lambda(-x)$ vaut bien 1, ce qui est évident.

I.3.c. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout x : $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$ et on a vu que f_{1-p} était un polynôme de degré $p-1$. En particulier $f_2(x) = (1+x)e^x$ et $f_3(x) = (1 + 2x + \dfrac{1}{2}x^2)e^x$.

I.3.d. Au voisinage de $+\infty$, d'après le I.1.b, on dispose de

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \frac{f_{-p}(-x)}{xf_{1-p}(-x)} \sim \frac{x^p/p!}{x.x^{p-1}/(p-1)!} = \frac{1}{p}.$$

Question I.4

Le calcul fournit $\dfrac{\partial F}{\partial u}(x,y,z) = \dfrac{u}{r}\dfrac{2rf'_\lambda(r) - f_\lambda(r)}{2r^{3/2}}$ pour $u = x$, y ou z.

De même $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x,y,z) = (\dfrac{1}{r} - \dfrac{u^2}{r^3})\dfrac{2rf'_\lambda(r) - f_\lambda(r)}{2r^{3/2}} + \dfrac{u^2}{r^2}\dfrac{4r^2 f''_\lambda(r) - 4rf'_\lambda(r) + 3f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}$, et, en sommant, on obtient le laplacien de F, qui s'écrit : $\dfrac{2}{r}\dfrac{2rf'_\lambda(r) - f_\lambda(r)}{2r^{3/2}} + \dfrac{4r^2 f''_\lambda(r) - 4rf'_\lambda(r) + 3f_\lambda(r)}{4r^{5/2}} = \dfrac{1}{4r^{5/2}}(4r^2 f''_\lambda(r) + 4rf'_\lambda(r) - f_\lambda(r))$.

Tenant compte de l'équation (E_λ) vérifiée par f_λ, le laplacien se réécrit : $\dfrac{4r^2 f'_\lambda(r) + (4\lambda r - 1)f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}$, et l'équation (P) devient tout simplement $(2\lambda + 1)\dfrac{rf_\lambda(r)}{2r^{5/2}} = 0$ et est donc vérifiée dès que $\lambda = -1/2$.

PARTIE II

Question II.1

On obtient très classiquement, après une intégration par parties : $I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2(p+1)}I_p$. Or $I_0 = \pi/2$ donc, plus généralement :

$$I_p = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}.$$

Question II.2

II.2.a. L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} [0,\pi/2] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (\theta, x) \longmapsto e^{x\sin^2\theta} \end{array} \right.$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la droite réelle.

II.2.b. Soit x un réel fixé. On dispose de $\forall \theta \in [0,\pi/2], e^{x\sin^2\theta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \sin^{2n}\theta}{n!}$, la série écrite convergeant normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque $(\sum \dfrac{|x|^n}{n!})$ est une série convergente (de somme $e^{|x|}$). On peut donc intégrer terme à terme, c'est-à-dire écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\sin^2\theta}\,d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2p)!}{4^p p!^3}x^p.$$

φ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infini. Ses coefficients sont les $I_p/p!$, qui vérifient la récurrence : $I_0 = \pi/2$ et $\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{2n-1}{2n^2}\,\dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}$.

Rappelons que $f_{1/2}$ est la fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ dont les coefficients vérifient $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_n = \dfrac{n - 1/2}{n^2}a_{n-1}$: ce sont donc les mêmes coefficients, à $\pi/2$ près.

Bref : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}f_{1/2}(x)$.

Question II.3

II.3.a. Une étude rapide montre que $u \mapsto (1-u)e^u$ est croissante (de 0 à 1) sur $]-\infty, 0]$ puis décroissante (de 1 à 0) sur $[0, 1[$. Son maximum vaut 1, atteint pour $u = 0$. On en déduit l'inégalité demandée.

II.3.b. Notons que comme $x < 1$, l'intégrale est bien définie. Le changement de variable $t = \tan\theta$ conduit à :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x\sin^2\theta} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 - x\frac{t^2}{1-t^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (1-x)t^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctan(t\sqrt{1-x})\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}.$$

II.3.c. La positivité de $\varphi(x)$ est évidente. La majoration est conséquence immédiate du a.

II.3.d. Pour $\theta \in [0, \pi/2]$, on dispose de $\sin^2\theta \leqslant \theta^2$, et donc, pour $x \leqslant -1$, de $x\sin^2\theta \geqslant x\theta^2$.
Alors, toujours pour $x \leqslant -1$, on a :

$$\varphi(x) \geqslant \int_0^{\pi/2} e^{x\theta^2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-(\sqrt{-x}\theta)^2} \frac{d(\sqrt{-x}\theta)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\pi\sqrt{-x}/2} e^{-v^2}\, dv \geqslant \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\pi/2} e^{-v^2}\, dv.$$

On dispose donc de la minoration souhaitée, où $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-v^2}\, dv$.

II.3.e. Grâce à l'encadrement démontré au c., il est clair que φ est de limite nulle en $-\infty$. Mais comme $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$, la minoration du d. prouve que φ n'est pas non plus intégrable sur $]-\infty, -1]$.

Question II.4

II.4.a. D'après le I.3.b, $\forall x \in \mathbb{R}, f_{1/2}(x) = e^x f_{1/2}(-x)$ donc $h(x) = e^{-x/2} f_{1/2}(x) = e^{x/2} f_{1/2}(-x) = h(-x)$, et h est bien paire.
Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) = \frac{1}{\pi}(e^{-x/2}\varphi(x) + e^{x/2}\varphi(-x)) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(e^{x/2(2\sin^2\theta - 1)} + e^{-x/2(2\sin^2\theta-1)}\right) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du,
\end{aligned}$$

grâce à la parité du cosinus hyperbolique.

II.4.b. La minoration (vraie sur tout $\mathbb{R}$) $\operatorname{ch} t \geqslant 1 + \dfrac{t^2}{2}$ (qui découle par exemple de la série entière qui définit ch) fournit :

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \geqslant 1 + \frac{1}{4\pi} x^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = 1 + \frac{x^2}{16} \gg x.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.

II.4.c. La fonction h est clairement croissante sur $[0, +\infty[$ car

$$0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \forall u \in [0, \pi/2], 0 \leqslant \frac{x}{2}\cos u \leqslant \frac{y}{2}\cos u \Rightarrow 1 \leqslant \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u) \leqslant \operatorname{ch}(\frac{y}{2}\cos u) \Rightarrow h(x) \leqslant h(y).$$

D'ailleurs, on peut dire aussi (le théorème de dérivation d'un intégrale à paramètre sur un support compact s'applique sans difficulté) que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$h'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos u \operatorname{sh}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \quad \text{et} \quad h''(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \operatorname{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \geqslant 0,$$

ce qui conclut à la croissance sur $[0, +\infty[$ et la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
L'aspect général (très simple) de la courbe s'en déduit aussitôt.