MINES - II - PSI - 2000

Première partie

I-1) La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soit $g(t) = f(t + 2\pi)$. La fonction g vérifie la même équation différentielle que f et possède les mêmes conditions initiales pour $t = 0$ ($f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$). Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'unicité de la solution donc f = g. f est donc périodique de période 2π.

I-2) **a)** f est de classe C^2 (et même de classe C^∞ en utilisant $f''(t) = -e^{it}f(t)$ et une récurrence), or il suffit que f soit C^1 pour être égale à sa série de Fourier.

b) f étant C^∞, f'' est aussi égale à sa série de Fourier donc $f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\, c_n(f)\, e^{int}$. On a donc :

$$f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\, c_n(f)\, e^{int} \text{ d'une part}$$

$$f''(t) = -e^{it} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -c_n(f)\, e^{i(n+1)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -c_{n-1}(f)\, e^{int} \text{ d'autre part}$$

$\Rightarrow \quad n^2\, c_n(f) = c_{n-1}(f)$

c) En particulier, pour $n = 0$, on obtient $c_{-1}(f) = 0$ et par récurrence tous les $c_n(f)$ avec n négatifs sont nuls. Par récurrence également, pour n positif, $c_n(f) = \dfrac{1}{(n!)^2}\, c_0(f)$

Donc $f(t) = c_0(f) \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2}\, e^{int}$

I-3) **a)** L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$|C| = |f(t+h) - f(t) - h f'(t)| \le \frac{h^2}{2} \| f'' \|_\infty = \frac{h^2}{2} \| f \|_\infty \text{ et de même pour D}$$

b) $|C-D| = |f(t+h) - f(t-h) - 2h f'(t)| \le |C| + |D| \le h^2 \| f \|_\infty$

$$\Rightarrow \quad |2h f'(t)| \le |f(t+h) - f(t-h) - 2h f'(t)| + |f(t+h) - f(t-h)|$$
$$\le (h^2 + 2) \| f \|_\infty$$

$$\Rightarrow \quad |f'(t)| \le \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{h}\right) \| f \|_\infty$$

Pour $h = \sqrt{2}$ (qui minimise la quantité $\dfrac{h}{2} + \dfrac{1}{h}$), on obtient l'inégalité cherchée.

Deuxième partie

II-1) $R = +\infty$

II-2) $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}$

Pour x compris entre 0 et 2, la suite $n \to \dfrac{1}{n!\,(n-1)!}\,x^{n-1}$ décroît donc la série alternée est du signe du premier terme. $g'(x)$ est donc négatif sur [0,2].

Or $g(0) = 1$ alors que $g(2) = 1 - 2 + 1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{(n!)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{(n!)^2} < 0$. En effet, $\dfrac{2^n}{(n!)^2}$ décroît pour $n \geq 3$, donc la série alternée a pour signe son premier terme (qui est négatif). g étant strictement décroissante, il y a dans l'intervalle [0,2] une solution unique x_0 à l'équation $g(x) = 0$.

Pour montrer que $x_0 > \sqrt{2}$, il suffit de montrer que $g(\sqrt{2}) > 0$. Par un raisonnement analogue à ci-dessus, $g(\sqrt{2}) = u_0(x) + ... + u_3(x)$ + qqc de positif $> 1 - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{18} > 0{,}007$

Troisième partie

III-1) **a)** $y = 0$ (à nouveau Cauchy-Lipschitz)

b) $W'(t) = y(t)z''(t) - y''(t)z(t) = (e^t - e^a)\, y(t)z(t)$ est strictement positive sur $]\alpha,\beta[$ et donc W est strictement croissante sur $[\alpha,\beta]$. Or :

$W(\alpha) = y(\alpha)z'(\alpha) \geq 0$ et $W(\beta) = y(\beta)z'(\beta) \leq 0$ contradictoire. Donc H est fausse. y doit donc changer de signe et donc s'annuler entre les deux zéros de z **supérieurs à *a*** (précision oubliée de l'énoncé).

c) Considérons l'équation $z'' + e^\tau z = 0$ dont une solution est $\sin(e^{\tau/2}\,(t-\tau))$. z s'annule en $\alpha = \tau$ et $\beta = \tau + \pi\, e^{-\tau/2}$ et est strictement positive entre ces deux valeurs. y s'annule donc entre ces deux zéros.

III-2) **a)** **Il s'agit de montrer que *y* ne s'annule pas et pas seulement que *y* n'est pas nulle (au sens identiquement nulle)**

Si $y(\tau) = 0$ alors $y'(\tau) \neq 0$ (sinon, y serait la solution identiquement nulle). Il existe donc un intervalle centré en τ où y' ne s'annule pas et où y est strictement monotone.

b) Considérons $z(t) = \sin(e^{\beta/2}\,(t-\alpha))$, solution de $z''(t) + e^\beta z(t) = 0$ avec α et $\alpha + \pi\, e^{-\beta/2}$ deux zéros consécutifs de z. Quitte à changer le signe de y, nous supposerons $y > 0$ sur $]\alpha,\beta[$, $y'(\alpha) \geq 0$ et $y'(\beta) \leq 0$. Considérons $W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$. On a $W(\alpha) = 0$, $W'(t) = (e^t - e^\beta)\, y(t)z(t) < 0$ quand t varie de α à $\mathrm{Min}\,\{\beta,\ \alpha + \pi\, e^{-\beta/2}\}$, donc W décroît strictement sur le même intervalle donc est strictement négatif et est donc d'un signe opposé à celui de z sur cet intervalle. Or $W(\beta) = -\,y'(\beta)z(\beta)$ est du signe de $z(\beta)$. Cela impose donc que $\beta \geq \alpha + \pi\, e^{-\beta/2}$.

Quatrième partie

On remarque que $v_n(t) = u_n(e^t)$ et donc que $\Psi(t) = g(e^t)$

IV-1) **a)** La série est même normalement convergente puisque $|v_n(t)| < \dfrac{e^{na}}{(n!)^2}$ pour tout t de $]-\infty,a]$.

b) Les séries dérivées sont également normalement convergente sur le même type d'intervalle. On peut donc dériver terme à terme ce qui donne bien :

$$\Psi''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nt}}{((n-1)!)^2} = -\,e^t\,\Psi(t)$$

Cette relation est vérifiée sur tout intervalle $]-\infty,a]$, donc sur $\mathbb{R}$.

IV-2) Le II-2 permet d'affirmer que le premier zéro de Ψ est tel que $x_0 = e^{t_0} > \sqrt{2}$ soit $t_0 > \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

Le III-2-a) permet d'ordonner les zéros successifs de Ψ en une suite strictement croissante. En effet, si t_n est un zéro, t_{n+1} sera la borne Inf de $\{t, \Psi(t) = 0\}$, qui sera strictement plus grand que t_n. En outre, cette suite (t_n) ne peut avoir une limite finie l, car on aurait d'une part $t_{n+1} - t_n$ qui tend vers 0, et d'autre part, le III-2-b) implique que l'on aurait également $t_{n+1} - t_n \geq \pi \exp(-\frac{t_n}{2}) \geq \pi \exp(-\frac{l}{2}) > 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$. Le III-1-c) permet de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} - t_n = 0$ (dans chaque intervalle $[\tau, \tau + \pi\, e^{-\tau/2}]$ il y a un zéro. Prendre $\tau' = \tau + \pi\, e^{-\tau/2}$. Dans $[\tau', \tau' + \pi\, e^{-\tau'/2}]$ il y a aussi un zéro, et la longueur totale de l'intervalle réunion tend vers 0).

Cinquième partie

V-1) $f(t) \leq \mathrm{M} + \int_a^t f(x)g(x)\, \mathrm{d}t = \mathrm{M} + \mathrm{F}(t)$

ou encore $\mathrm{F}'(t) = f(t)g(t) \leq (\mathrm{M} + \mathrm{F}(t))g(t)$

Multiplions les deux membres par $\mathrm{G}(t) = \exp(\int_a^t g(x)\, \mathrm{d}x)$, fonction vérifiant $\mathrm{G}'(t) = g(t)\mathrm{G}(t)$. L'inéquation précédente implique que :

$$\mathrm{F}'(t)\mathrm{G}(t) - \mathrm{F}(t)\mathrm{G}'(t) \leq \mathrm{M}\, \mathrm{G}'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{F}'(t)\mathrm{G}(t) - \mathrm{F}(t)\mathrm{G}'(t)}{\mathrm{G}^2(t)} \leq \mathrm{M}\, \frac{\mathrm{G}'(t)}{\mathrm{G}^2(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{F}(t)}{\mathrm{G}(t)} \leq \mathrm{M} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{G}(t)} \text{ en intégrant de } a \text{ à } t$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{F}(t) \leq \mathrm{M}\mathrm{G}(t) - \mathrm{M}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) \leq \mathrm{M}\mathrm{G}(t)$$

V-2) **a)** $y(t) = y(a) + (t-a)y'(a) + \int_a^t y''(x)(t-x)\, \mathrm{d}x$ d'après la formule de Taylor avec reste intégral. Donc $\mathrm{A}(t) = y(a) + (t-a)y'(a)$.

b) $\frac{\mathrm{A}(t)}{t}$ est bornée par une quantité M et $0 \leq \frac{t-x}{t} \leq 1$. Donc

$|j(t)| \leq \mathrm{M} + \int_0^a |j(x)|\, x\, |\varphi(x)|\, \mathrm{d}x$ inégalité sur laquelle on applique la question précédente

$$\Rightarrow \quad |j(t)| \leq \mathrm{M} \exp \int_a^t x\, |\varphi(x)|\, \mathrm{d}x \leq \mathrm{M} \exp \int_a^{+\infty} x\, |\varphi(x)|\, \mathrm{d}x$$

V-3) **a)** $y''(t) = -\varphi(t)\, y(t) = -t\, \varphi(t)\, j(t) \Rightarrow |y''(t)| \leq \mathrm{M}\, |t\, \varphi(t)|$ donc y'' est intégrable, donc $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t)$ qui n'est autre que $y'(a) + \int_a^\infty y''(t)\, \mathrm{d}t$ existe.

b) Ecrire que $\frac{y(t)}{t} = \frac{y(t) - y(a)}{t-a} \times \frac{t-a}{t} + \frac{y(a)}{t} = y'(\theta) \times \frac{t-a}{t} + \frac{y(a)}{t}$ avec θ élément de $]a,t[$. Soit $\varepsilon > 0$, choisir a assez grand pour que $l - \varepsilon < y'(\theta) < l + \varepsilon$ pour $\theta > a$, puis, cet a étant choisi, choisir t assez grand pour encadrer $\frac{y(t)}{t}$ par $l - 2\varepsilon$ et $l + 2\varepsilon$...