Questions de cours

1. $\mathcal{E}$ est de dimension n^2, et une base en est la famille des matrices $E_{i,j}$.

2. Notons $P = (p_{x,y}) = E_{i,j}E_{k,l}$. Tout d'abord, $p_{x,y}$ est nul dès que la ligne x de $E_{i,j}$ ou la colonne y de $E_{k,l}$ sont nulles, c'est-à-dire lorsque $x \neq i$ ou $y \neq l$. Il ne reste plus qu'à déterminer $p_{i,l}$, qui vaut 0 si $j \neq k$ et 1 si $j = k$.
Finalement, $E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si} \quad j = k. \\ 0_{M_n(\mathbb{R})} & \text{sinon.} \end{cases}$.

3. Théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique d'une matrice carrée en est un polynôme annulateur.

4. Une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

Propriétés élémentaires

1. Puisque A est une matrice nilpotente, il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$; ainsi $\det(A^p) = 0$, et $\det(A) = 0$: A n'est pas inversible.

2. Soit (λ, X) un couple (valeur propre, vecteur propre) de A dans $\mathbb{C}$: $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Par récurrence sur l'entier naturel k, on démontre alors que $A^k X = \lambda^k X$ pour tout k. En particulier, $A^p X = 0 = \lambda^p X$, et, puisque $X \neq 0$, $\lambda^p = 0$, soit $\lambda = 0$: $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, que son terme de plus haut degré est X^n, et enfin que χ_A n'admet qe 0 comme racine, $\chi_A = X^n$.

3. Si A est diagonalisable, A est semblbable à la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont nuls : A est la matrice nulle. Ainsi, A est diagonalisable et nilpotente si et seulement si A est la matrice nulle.

4. Vect(A) est l'ensemble des matrices de la forme kA, où k est un réel. Or $(kA)^p = k^p A^p = 0$ quel que soit le réel k. Ainsi Vect(A) $\subset \mathcal{N}$.

5. ${}^tA^p = {}^t(A^p) = {}^t0 = 0$: ${}^tA \in \mathcal{N}$.

6. Si M est semblable à A, il existe une matrice P de $\mathcal{E}$, inversible, telle que $M = P^{-1}AP$. On démontre alors que $M^k = P^{-1}A^kP$ pour tout entier naturel k, et l'on en déduit que $M^p = 0$: $M \in \mathcal{N}$.

7. Puisque $\chi_A = X^n$, χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme
$$T = \begin{pmatrix} 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \bullet \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$
On démontre alors par récurrence sur n, en utilisant par exemple le produit matriciel par blocs, que $T^n = 0$, et donc que $A^n = 0$.

8. Que dire de plus ?

9. C'est fait, et le rang maximum de A est celui de la matrice T ci-dessus, soit $n - 1$.

10.1. Il existe un entier naturel q tel que $(BC)^q = 0$, ce qui s'écrit encore $B(CB)^{q-1}C = 0$ par associativité du produit matriciel. Ainsi $CB(CB)^{q-1}CB = 0$, soit $(CB)^{q+1} = 0$, et CB est nilpotente.

10.2. Il existe un entier naturel q tel que $B^q = 0$. On calcule alors $(AB)^{\max(p,q)} = A^{\max(p,q)}B^{\max(p,q)} = 0$, et $(A+B)^{p+q}$ que l'on développe par la formule du binôme, puisque A et B commutent :

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}\end{aligned}.$$

La première somme vaut 0 puisque les puissances de B y sont supérieures à q, et la seconde car les puissances de A sont supérieures à p.

11. Une matrice symétrique réelle étant toujours diagonalisable, elle n'est nilpotente que si elle est nulle (3.).

12.1. On vérifie facilement que A^2 est symétrique, et nilpotente...

12.2. On se souvient que $\mathrm{tr}({}^tAA)$ est la somme des carées de tous les éléments de A. Mais c'est aussi $-\mathrm{tr}(A^2)$, soit 0...

Exemples

1.1. 0 est valeur propre de M, d'ordre de multiplicité n. La dimension du sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 est $n - \mathrm{rg}(M) = n - (n-1) = 1$.

1.2. $M +^t M$ est une matrice symétrique non nulle : elle n'est pas nilpotente.

$S = J - I_n$, où J est la matrice de E dont tous les éléments valent 1. On vérifie aisément que $J^2 = nJ$, et, puisque J et I_n commutent, $S^2 = nJ + I_n - 2J = I_n + (n-2)J = (n-2)S + (n-1)I_n \in \mathrm{Vect}(I_n, S)$.

Les valeurs propres de S sont donc à chercher parmi les racines du polynôme annulateur $X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$. Comme S est diagonalisable et n'est pas une matrice d'homthétie, -1 ET n-1 sont valeurs propres de S, la première avec comme sous-espace propre l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$, la seconde la droite engendrée par $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3. M est ${}^tM$ sont toutes deux nilpotentes (cf I.7), mais leur somme ne l'est pas : $\mathcal{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

2.1. Ici, $\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$. Puisque M est de rang 1, $\det(M) = 0$, et le théorème de Cayley-Hamilton permet d'écrire $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$.

Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, M est nilpotente. Sinon, M annule le polynôme scindé à racines simples $X(X - \mathrm{tr}(M))$, et M est diagonalisable.

2.2. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ doit convenir.

2.3. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, nilpotente et non nulle. D'après I.9., A est de rang 1 et, d'après la question précédente, de trace nulle. Finalement, les matrices nilpotentes de $M_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 0$.

Sous-espace engendré par $\mathcal{N}$

1. T_0 est le noyau de la forme linéaire non nulle trace : c'est un hyperplan de $\mathcal{E}$, de dimension $n^2 - 1$.

2. Une matrice nilpotente de $\mathcal{E}$ est semblable à une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls : sa trace est nulle, de même que la trace de toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

3.1. $F_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1. Donc $F_j^2 = \mathrm{tr}(F_j)F_j = 0$ puisque $\mathrm{tr}(F_j) = 0$.

3.2. F_j, $E_{1,j}$ et $E_{j,1}$ sont nilpotentes. G_j est donc une combinaison linéaire de matrices nilpotentes, et $G_j \in V$.

3.3. On remarque que $G_k = E_{k,k} - E_{1,1}$. Une combinaison linéaire nulle de matrices de la famille $\mathcal{F}$ est donc une combinaison linéaire nulle des matrices élémentaires, avec les mêmes coefficients concernant celles autres que $E_{1,1}$. Ces coefficients, qui sont ceux de la combinaison initiale, sont donc tous nuls, et $\mathcal{F}$ est libre, dans V puisque que toutes les matrices de $\mathcal{F}$ sont dans V.

3.4. V est donc un sous-espace de T_0 de dimension au moins $n^2 - 1$: $V = T_0$.

Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathcal{N}$

1. Une base de T_1 est la famille $(E_{i,j})_{j>i}$, de cardinal $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. Déja fait en I.7.

3. Tout d'abord, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap T_1 = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. Ensuite la somme des dimensions de ces deux sous-espaces de $\mathcal{E}$ vaut n^2, soit la dimension de $\mathcal{E}$. Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et T_1 sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$.

4.1. Par l'absurde, si on suppose que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$, alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et F sont en somme directe, et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F$ est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2} + d > n^2$, ce qui n'est guère raisonnable pour un sous-espace de $\mathcal{E}$. Donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$, mézalors il y a dans F des matrices symétriques, nilpotentes, autres que la matrice nulle. C'est à nouveau absurde, et cette fois, c'est l'hypothèse $d > \dfrac{n(n-1)}{2}$ qui est fausse.

Finalement (ouf), $d \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$...

4.2. La dimension d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ est inférieure à $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Puisque T_1 est un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ et de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ est exactement $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Un peu de topologie

1. Soit (A_k) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{N}$. Notons A sa limite. Pour tout k, $A_k^n = 0$ d'après I.7., et, par continuité de l'application $X \in \mathcal{E} \mapsto X^n$, polynômiale en les éléments de X, $A^n = 0$. Tout point adhérent à $\mathcal{N}$ est dans $\mathcal{N}$, et $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{E}$.

2. $I_n + \alpha A$ est semblable à une matrice $I_n + \alpha T$, où $T \in T_1$. Cette matrice, triangulaire avec des 1 sur la diagonale, est de déterminant 1.

Toute les normes étant équivalentes, je décide d'utiliser sur $\mathcal{E}$ la norme $M = (m_{i,j}) \mapsto \max(|m_{i,j}|)$, pour laquelle I_n est de norme 1. Soit r un réel strictement positif, et $t \in]-r, r[$ non nul. La matrice $A + tI_n$ est à une distance de A égale à $|t|$, donc inférieure strictement à r, et appartient à la boule ouverte de centre A et de rayon r. Son déterminant vaut t^n, c'est une matrice inversible, c'est-à-dire de rang n, et donc non nilpotente. On en déduit qu'aucun point de $\mathcal{N}$ n'est intérieur à $\mathcal{N}$, ou encore que $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide.

3. On considère un sous-espace F de $\mathcal{E}$ d'intérieur non vide : F contient une boule ouverte, $B(M, r)$.

Soit alors $\widetilde{M} \in \mathcal{E}$, différente de M. Notons α la distance de M à $\widetilde{M}$. La matrice $M + t(\widetilde{M} - M)$ appartient à $B(M, r)$ dès que $|t| < \frac{r}{\alpha}$.

Prenons $t \neq 0$ vérifiant cette condition. Alors $\widetilde{M} = \frac{1}{t}.\left(M + t(\widetilde{M} - M)\right) + \frac{t-1}{t}.M$, qui est une combinaison linéaire d'éléments de F. Ainsi $\widetilde{M} \in F$ et $F = \mathcal{E}$.

Supposons alors N d'intérieur non vide. Le sous-espace V engendré par N, contient N, et est donc lui aussi d'intérieur non vide. C'est donc $\mathcal{E}$, ce qui contredit les résultats de la partie III.

Deux autres résultats

1. Puisque I_n et A commutent, $I_n - (-\alpha A)^p = (I_n + \alpha A)(I_n - \alpha A + \alpha^2 A^2 + \ldots + (-\alpha)^{p-1} A^{p-1})$. Compte tenu de ce que $A^p = 0$, il vient $M.(I_n - \alpha A + \alpha^2 A^2 + \ldots + (-\alpha)^{p-1} A^{p-1}) = I_n$: M est inversible et son inverse est $I_n - \alpha A + \alpha^2 A^2 + \ldots + (-\alpha)^{p-1} A^{p-1}$.

2. Pour tout réel α, et tout $x \in]-1, 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, et pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1) \\
&= \frac{1}{2^n}.1.(-1).(-3)\ldots(-(2n-3)) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}.\frac{1.2.3\ldots(2n-3)(2n-2)}{2.4\ldots(2n-4)(2n-2)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}.\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}.(n-1)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}.\frac{(2n-2)!}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

et, finalement, $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}.\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

3. On serait tenté de prendre $B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}.\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} \alpha^k A^k$.

Premier problème : la convergence de cette série. En fait, la somme reste finie, puisque les puissances de A sont nulles à partir du rang p.

Deuxième problème : avec $B = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}.\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} \alpha^k A^k$, a-t-on bien $B^2 = M$?

Notons $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Pour tout k, $a_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}.\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}$. Puisque $\sqrt{1+x}.\sqrt{1+x} = 1+x$, par unicité des DSE, et en utilisant le produit de Cauchy,

$$\sum_{l=0}^{k} a_l a_{k-l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } 1. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule alors B^2 :

$$\begin{aligned}
B^2 &= \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}.\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} \alpha^k A^k \right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l a_{k-l} \right) \alpha^k A^k \\
&= I_n + \alpha A \\
&= M
\end{aligned}$$