

e3a 2015 - PSI 2 un corrigé

Préliminaires

1. Soit (e_1, \dots, e_p) une b.o.n. de E . Notons u l'unique endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1$ et $\forall i \geq 2, u(e_i) = 0$. u est un endomorphisme de E de rang 1. Il est symétrique (puisque représenté an b.o.n. par une matrice symétrique, ici diagonale). Enfin, si $x \in E$ alors $(u(x)|x) = (x|e_1)^2$ (puisque $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$) et donc $(u(x)|x) \geq 0$. Finalement, $u \in T$.
Cependant, $-u \notin T$ puisque $(-u(e_1)|e_1) = -1 < 0$. $T(E)$ n'est donc pas stable par combinaisons linéaires et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

2. (a) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^p (AB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^p A_{i,k} B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^p (BA)_{k,k} \\ &= \operatorname{Tr}(BA)\end{aligned}$$

- (b) Si B est semblable à A , il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$ et alors

$$\operatorname{Tr}(B) = \operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}(PP^{-1}A) = \operatorname{Tr}(A)$$

- (c) En particulier, la trace d'une matrice représentant u dans une base ne dépend pas de la base choisie (puisque deux choix de bases donnent deux matrices semblables). On peut donc définir la trace de u comme la trace de l'une quelconque des matrice le représentant.
3. On peut définir un hyperplan de E comme un sous-espace de E de codimension 1, c'est à dire de dimension $p - 1$.
 - (a) C'est **FAUX**. G ne contient pas le vecteur nul et n'est même pas un espace vectoriel.
 - (b) C'est **VRAI**. Soit $a \in G$; si $x \in H \cap \operatorname{Vect}(a)$ il existe un scalaire k tel que $x = ka$. Si $k \neq 0$ alors $a = x/k \in H$ ce qui est faux. On a ainsi $k = 0$ et donc $x = 0$. On en déduit que $\operatorname{Vect}(a)$ et H sont en somme directe. Par dimension, ils sont supplémentaires.
 - (c) C'est **VRAI**. Si a est non nul et orthogonal à H alors il n'est pas dans H (seul le vecteur nul est dans H et orthogonal à H). La question précédente montre qu'il engendre un supplémentaire de H dans E .
 - (d) C'est **VRAI**. Par théorème du rang, la dimension du noyau d'une forme linéaire non nulle est égale à la dimension de l'espace moins 1. Ce noyau est donc un hyperplan de l'espace.
 - (e) C'est **VRAI**, toujours grâce au théorème du rang.

4. L'application est bien définie et, avec les questions précédentes (2a) est symétrique. De plus,

$$\langle \lambda f + g, h \rangle = \operatorname{Tr}((\lambda f + g) \circ h) = \operatorname{Tr}(\lambda f \circ h + g \circ h) = \lambda \operatorname{Tr}(f \circ h) + \operatorname{Tr}(g \circ h) = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

ce qui donne la linéarité par rapport à la première variable. Notons enfin A une matrice représentant f dans une base orthonormée. On a $A^T = A$ par symétrie de f et

$$\langle f, f \rangle = \text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i,j}^2$$

C'est une quantité positive qui n'est nulle que si A , et donc aussi f , est nulle. On a donc le caractère défini positif et notre application définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}(E)$.

REMARQUE : on aurait aussi pu utiliser une base de diagonalisation de l'endomorphisme symétrique.

5. De façon immédiate, $(1, 1, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre -3 , $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont vecteurs propres associés à la valeur propre -6 . On a donc

$$\text{Sp}(A) \subset \{-3, -6\}, \text{Vect}((1, 1, 1)) \subset E_{-3}(A), \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1)) \subset E_{-6}(A)$$

Les sous-espaces propres étant en somme directe, on a toutes les valeurs propres et les inclusions ci-dessus sont des égalités.

Partie 1

1. u_a est immédiatement un endomorphisme de E (par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable). Son image est égale à $\text{Vect}(a)$ et est de dimension ≤ 1 (et donc le rang de u_a est ≤ 1). On a de plus

$$(u_a(x)|y) = (x|a)(a|y) = (x|u_a(y))$$

et u_a est symétrique. Enfin, pour tout x , $(u_a(x)|x) = (x|a)^2 \geq 0$. On a donc

$$u_a \in T(E)$$

2. (a) Comme $a \neq 0$, la famille \mathcal{B} proposée est bien une base. u_a envoie les éléments orthogonaux à a sur 0 et envoie a sur $\|a\|^2 a$. La matrice cherchée est donc

$$\text{diag}(\|a\|^2, 0, \dots, 0)$$

- (b) On en déduit que la matrice de u_a^2 est $\text{diag}(\|a\|^4, 0, \dots, 0)$ et que

$$\text{Tr}(u_a) = \|a\|^2, \text{Tr}(u_a^2) = \|a\|^4$$

- (c) La matrice de $f \circ u_a$ s'obtient en multipliant celle de f par celle de u_a ce qui revient à multiplier la première colonne par $\|a\|^2$ et les autres par 0. Les coefficients diagonaux de la matrice de $f \circ u_a$ sont donc $\|a\|^2 \alpha, 0, \dots, 0$, où α est le coefficient supérieur droit de la matrice de f . En décomposant $f(a)$ sur $\text{Vect}(a)$ et son orthogonal, on obtient $f(a) = \alpha a + y$ et ainsi $(f(a)|a) = \|a\|^2 \alpha$. On en déduit que les coefficients diagonaux de $f \circ u_a$ sont

$$(f(a)|a), 0, \dots, 0$$

- (d) En particulier,

$$\text{Tr}(f \circ u_a) = (f(a)|a)$$

3. Comme $u \in T$, on notera que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(b)$ (inclusion réciproque et égalité par dimension).

- (a) Comme $u(b) \in \text{Im}(u)$, il existe donc un scalaire μ tel que $u(b) = \mu b$. En prenant le produit scalaire avec b , il vient $0 \leq (u(b)|b) = \mu \|b\|^2$ et comme $\|b\|^2 > 0$, on a donc $\mu \geq 0$.

- (b) Soit $x \in E$. $u(x) \in \text{Im}(u)$ et il existe k tel que $u(x) = kb$. En prenant le produit scalaire avec b , il vient $k = \frac{(u(x)|b)}{\|b\|^2}$. Mais comme u est symétrique, $(u(x)|b) = (x|u(b)) = \mu(x|b)$ et ainsi

$$u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$$

- (c) μ ne peut donc être nul (sinon u le serait) et comme on a vu que $\mu \geq 0$, on conclut que

$$\mu > 0$$

- (d) Posons $a = \sqrt{\mu} \frac{b}{\|b\|}$. La question 3.b donne

$$\forall x \in E, u(x) = (x|a)a = u_a(x)$$

4. La question 1 montre que φ va bien de E dans $T(E)$. La question 3 indique que tout élément de $T(E)$ admet un antécédent et on a donc surjectivité de φ .

Comme $\varphi(a) = \varphi(-a)$, on montre que φ n'est pas injective en considérant un vecteur a non nul (et il y en a puisque $p \geq 1$). L'application φ n'est donc pas injective.

Partie 2

- $\{\Phi(x) / x \in E\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} (elle contient $N(f - u_0)^2 = N(f)^2$) et minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure $m(f)$.
- On développe par multilinéarité :

$$\Phi(x) = \langle f - u_x, f - u_x \rangle = N(f)^2 - 2\langle f, u_x \rangle + N(u_x)^2$$

Or, $N(u_x^2) = \langle u_x, u_x \rangle = \text{Tr}(u_x^2) = \|x\|^4$ (question 1.2.2) et $\langle f, u_x \rangle = \text{Tr}(f \circ u_x) = (f(x)|x)$ (question 1.2.d) et donc

$$\Phi(x) = N(f)^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4$$

- Ainsi (in utilise la symétrie de f et $\|y\| = 1$)

$$\begin{aligned} h_x(t) &= \Phi(x + ty) \\ &= N(f)^2 - 2(x + ty|f(x) + tf(y)) + \|x + ty\|^4 \\ &= N(f)^2 - 2((x|f(x)) + 2t(x|f(y)) + t^2(y|f(y))) + (\|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2)^2 \\ &= t^4 + 4(x|y)t^3 + (4(x|y)^2 + 2\|x\|^2 - 2(y|f(y)))t^2 \\ &\quad + (-4(x|f(y)) + 4\|x\|^2(x|y))t + N(f)^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^2 \end{aligned}$$

et h_x est polynomiale de degré 4.

- f est symétrique donc diagonalisable en b.o.n. Quitte à renuméroter les vecteurs de cette base (e_i) , il est toujours possible de supposer que les valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont ordonnées.
- Dans la base \mathcal{C} , f est représentée par $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $f \circ f$ par $\text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2)$. On a donc

$$N(f) = \sqrt{\text{Tr}(f \circ f)} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}$$

- Soit $z \in E$ de norme 1 ; il peut alors s'écrire $z = z_1 e_1 + \dots + z_p e_p$ avec $z_1^2 + \dots + z_p^2 = 1$. On a alors

$$(z|f(z)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i^2 \leq \lambda_p \sum_{i=1}^p z_i^2 = \lambda_p$$

Ceci montre (en passant à la borne supérieure) que $\alpha \leq \lambda_p$. $z = e_p$ étant un élément de norme 1 pour lequel l'inégalité ci-dessus est une égalité, on conclut que

$$\alpha = \max_{\|z\|=1} (z|f(z)) = \lambda_p$$

Si $(z|f(z)) = \lambda_p$, on a $\forall i, \lambda_i z_i^2 = \lambda_p z_i^2$. Dès que $\lambda_i \neq \lambda_p$, on a donc $z_i = 0$. z est donc combinaison linéaire des e_i tels que $\lambda_i = \lambda_p$. C'est ainsi un élément de $\ker(f - \lambda_p Id_E)$.

Réciproquement, si z est de norme 1 et élément de $\ker(f - \lambda_p Id_E)$, on a $(z|f(z)) = \lambda_p$ par le calcul ci-dessus.

7. (a) Si $m(f)$ est atteint en a alors h_a est minimale en a . Sur un ouvert I de \mathbb{R} , les seuls points où une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable peut atteindre un extremum local sont les points d'annulation de la dérivée. On a donc

$$h'_a(0) = 0$$

- (b) On en déduit, avec la question 3 que

$$\forall y \in E \text{ tel que } \|y\| = 1, (a|f(y)) = \|a\|^2(a|y)$$

(on a dérivé h_a et pris la valeur en 0). f étant symétrique, ceci s'écrit aussi

$$\forall y \in E \text{ tel que } \|y\| = 1, (f(a)|y) = \|a\|^2(a|y)$$

Ainsi, $f(a) - \|a\|^2 a$ est orthogonal à tout vecteur unitaire et donc à tout vecteur (multiplier par un scalaire ne changera pas la nullité). Comme $E^\perp = \{0\}$, on a prouvé que

$$f(a) = \|a\|^2 a$$

- (c) Il suffit alors de reprendre l'expression obtenue en question 3. Le terme de degré 1 est nul, le terme constant est égal à $\Phi(a)$ et on obtient

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) = t^2[(t + 2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))]$$

(pour tout y unitaire).

- (d) Si $m(f)$ est atteint en a , pour tout y unitaire, $(t + 2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))$ reste positif et on a donc $\|a\|^2 - (y|f(y)) \geq 0$. On a aussi vu plus haut que $f(a) = \|a\|^2 a$.

Réciproquement, si ces relations ont lieu, $f(a) = \|a\|^2 a$ donne l'identité de 7.c et la seconde condition donne alors que $\Phi(a + ty) - \Phi(a)$ reste positif. Comme ty décrit E quand t décrit \mathbb{R} et y la sphère unité, Φ atteint donc son minimum $m(f)$ en a .

8. On suppose $\lambda_p \leq 0$.

- (a) On a $(y|f(y)) \leq 0$ pour tout y unitaire (question 6). 0 vérifie les deux conditions de 7.d et $m(f) = \Phi(0)$.

Réciproquement, si $m(f) = \Phi(a)$ et, par l'absurde $a \neq 0$. a est alors vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|a\|^2 > 0$ ce qui est impossible (on a supposé $\lambda_p \leq 0$). On a donc $a = 0$.

- (b) f_A n'admettant que des valeurs propres négatives, $m(f_A) = \Phi(0) = N(f - u_0)^2 = N(f)^2$. Avec la question 5 (et comme les valeurs propres sont $-6, -6$ et -3) on a donc

$$m(f_A) = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 81$$

9. On suppose que $\lambda_p > 0$.

- (a) Posons $a = \sqrt{\lambda_p} e_p$. On a $f(a) = \sqrt{\lambda_p} \lambda_p e_p = \|a\|^2 a$. De plus, pour tout y de norme 1, on a $(y|f(y)) \leq \lambda_p = \|a\|^2$. On en déduit que

$$m(f) = \Phi(a) = N(f)^2 - 2(a|f(a)) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$$

- (b) On raisonne par analyse et synthèse.
- Supposons $m(f) = \Phi(x)$. On a alors $\lambda_p = \alpha \leq \|x\|^2$ et x est non nul. Comme de plus $f(x) = \|x\|^2 x$ et x est donc vecteur propre de f . Il existe donc un i tel que $f(x) = \lambda_i x$. $f(x) = \|x\|^2 x$ donne $\|x\| = \sqrt{\lambda_i}$ puis on en déduit que $\lambda_p = \alpha \leq \lambda_i$ ce qui entraîne $\lambda_i = \lambda_p$ (car les λ_k sont ordonnés).
 - Réciproquement, supposons que $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$ et que $f(x) = \lambda_p x$. On a alors immédiatement $f(x) = \lambda_p x = \|x\|^2 x$. De plus, la question 6 indique que pour tout y unitaire on a $(y|f(y)) \leq \lambda_p = \|x\|^2$. Ceci indique (question 7.d) que $m(f) = \Phi(x)$.

Partie 3

1. On travaille ici avec une matrice stochastique symétrique.
 - (a) On a immédiatement que $(1, \dots, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 (multiplier M par ce vecteur revient à sommer toutes les colonnes).
 - (b) Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\lambda x_k = (MX)_K = \sum_{j=1}^p m_{k,j} x_j$$

En passant à la valeur absolue et avec l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda| \cdot |x_k| \leq \sum_{j=1}^p |m_{k,j}| \cdot |x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1}^p m_{k,j} = |x_k|$$

Comme $X \neq 0$ (vecteur propre), on a $|x_k| > 0$ et ainsi

$$|\lambda| \leq 1$$

- (c) On est dans la situation de la partie 2 avec $\lambda_p = 1$ (toutes les valeurs propres sont plus petites que 1 qui est valeur propre). D'après la question 2.9.b, un élément de norme 1 de $\ker(f - Id_E)$ donne un vecteur où Φ atteint son minimum. On peut ainsi choisir

$$a = \frac{1}{\sqrt{p}}(1, \dots, 1)$$

- (d) On a alors

$$m(f_M) = \Phi(a) = [N(f_M - u_a)]^2$$

et l'endomorphisme $v = u_a$ convient.

- (e) On a $v(x) = (x|a)a$ et comme $\|a\| = 1$, v est la projection orthogonale sur $\text{vect}(a)$ (formule sur les projections en b.o.n.).
2. B est de rang 1 et admet donc 0 comme valeur propre avec une multiplicité $n - 1$ (elle est diagonalisable et son noyau est de dimension $n - 1$). De plus $(1, \dots, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre p . Les sous-espaces propres étant en somme directe, il n'y a que ces

deux valeurs propres (et deux sous-espaces propres de dimensions $n - 1$ et p). On est dans le cadre de la partie 2 avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ et $\lambda_p = p$. On obtient

$$m(f_B) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = 0$$

De plus, $b = (1, \dots, 1)$ est un vecteur de norme \sqrt{p} dans le noyau de $f_B - pId_E$ et

$$m(f_B) = \Phi(b) = [N(f_B - u_b)]^2$$

3. (a) $C = B - I_p$ et ainsi (en notant $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p)

$$\text{Sp}(C) = \{-1, p-1\}, E_{-1}(C) = \text{Vect}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_1 - \varepsilon_p), E_{p-1}(C) = \text{vect}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p)$$

(b) On a cette fois (comme $p > 1$, $\lambda_p = p - 1 > 0$)

$$m(f_C) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = p - 1$$

(c) On cherche c de norme $\sqrt{p-1}$ colinéaire à $(1, \dots, 1)$, il suffit de choisir

$$c = \sqrt{\frac{p-1}{p}}(1, \dots, 1) \text{ et } w = u_c$$

(d) Supposons que $N(f_c - u)^2 = m(f_C)$ avec $u \in T(E)$. D'après la surjectivité de l'application φ de la partie 1, il existe x tel que $u = u_x$. On a alors $m(f_C) = \Phi(x)$ et donc $\|x\| = \sqrt{p-1}$ avec $x \in \ker(f - (p-1)Id_E)$. Comme cet espace est de dimension 1, il y a deux x possibles qui sont opposés. Comme $u_x = u_{-x}$, on obtient un seul élément de $T(E)$ possible et il y a unicité.