# e3a PSI - 2011
# Epreuve B : un corrigé

## Exercice 1.

1. Si $a$ est racine de $P$ alors $P(a) = 0$. Avac $(*)$, on a alors
$$P((a+1)^2 - 1) = P(a)P(a+2) = 0 \text{ et } P((a-1)^2 - 1) = P(a-2)P(a) = 0$$
et $(a+1)^2 - 1$ et $(a-1)^2 - 1$ sont racines de $P$.

2. (a) On a $a_{n+1} = (a_n + 1)^2 - 1$ et si $a_n$ est racine de $P$, la question précédente montre qu'il en est de même pour $a_{n+1}$. Comme on suppose que c'est le cas pour $a_0$, un processus récurrent immédiat indique que tous les $a_n$ sont racines de $P$.

   (b) On a $a_{n+1}$ qui est $> 0$ quand $a_n$ l'est. Quand $a_0 > 0$, un processus récurrent immédiat indique que tous les $a_n$ sont $> 0$. On a alors $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n > 0$ et la suite $(a_n)$ croît strictement.

   (c) Si $P$ admet une racine $a_0 > 0$ alors on obtient une infinité de racines distinctes pour $P$ (les $a_n$) ce qui contredit la non nullité du polynôme $P$ (un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines).

   (d) Si $-1$ est racine de $P$ alors $(-1-1)^2-1 = 3$ l'est aussi ce qui contrdit la question précédente. On a donc $P(-1) \neq 0$.

   (e) On prouve le résultat par récurrence sur $n$. Il est vrai pour $n = 0$ (et se lit $a_0 + 1 = a_0 + 1$). Supposons le vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ ; on a alors $1 + a_{n+1} = (1 + a_n)^2 = ((1 + a_0)^{2^n})^2 = (1 + a_0)^{2^{n+1}}$ ce qui montre le résultat au rang $n + 1$.

3. Soit $a$ une racine complexe de $P$. On a alors $1 + (a+1)^{2^n}$ qui est, pour tout $n$ racine de $P$. Si, par l'absurde, $|a + 1| < 1$, la suite de terme général $(a+1)^{2^n}$ est de limite nulle et, $P$ étant continue, on a alors $P(1) = 0$ ce qui est faux. Ainsi, $|a + 1| \geq 1$.
Si, par l'absurde, $|a + 1| > 1$ alors $|1 + (a+1)^{2^n}| \geq |a+1|^{2^n} - 1 \to +\infty$ et on a donc une suite de racines de $P$ de module de plus en plus grand et donc une infinité de racines ce qui contrdit $P \neq 0$. On a donc aussi $|a + 1| \leq 1$.

4. On suppose $P$ non constant. Soit $a$ une racine de $P$ ; son image dans le plan complexe doit être sur le cercle de centre $(-1, 0)$ de rayon 1 et sur le cercle de centre $(1, 0)$ de rayon 1. On a donc nécessairement $a = 0$. Comme $P$ possède au moins une racine (polynôme complexe non constant), 0 est son unique racine.

5. Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$. D'après la question précédente, les seules solution envisageables sont les polynômes constants non nuls et ceux du type $cX^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $c \neq 0$. Finalement, les seuls solutions envisageables sont du type $cX^d$ avec $c \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}$.
Réciproquement, pour $P = cX^d$ avec $c \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}$, $P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$ s'écrit $c(X^2 - 1)^d = c^2(X^2 - 1)^d$. Ceci n'a lieu (quand $c \neq 0$) que pour $c = 1$. Les solutions sont donc les monômes $X^d$.

## Exercice 2.

### Partie A.

1. On a $\varphi$ qui est paire et donc $x$ qui est paire et $y$ impaire. Ainsi, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe $(Ox)$. Par ailleurs, $M(0) = (-1, 0)$ est élément de $\mathcal{C}$.

2. Si $Q$ est point double de $\mathcal{C}$ alors il existe $t_1 < t_2$ tels que $Q = M(t_1) = M(t_2)$. On a alors $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ et $t_1\varphi(t_1) = t_2\varphi(t_2)$. Comme $t_1 \neq t_2$, ceci impose $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ et donc $t_1 = -1$ et $t_2 = 1$. Réciproquement, $M(1) = M(-1) = (0, 0)$.

L'origine est l'unique point double

On a $\varphi'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$ qui ne s'annule qu'en $t = 0$. $x'(t) = 0$ entraîne donc $t = 0$. Réciproquement $y'(0) = -1 \neq 0$.

$\mathcal{C}$ ne présente aucun point stationnaire

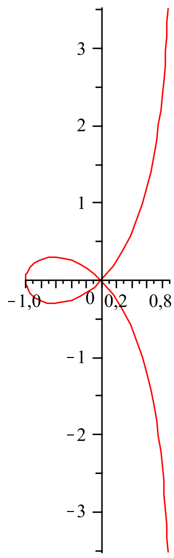
Les seules branches infinies ont lieu quand $t \to \pm\infty$. Or, quand $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 1$ et $y(t) \to \pm\infty$.

$x = 1$ est l'unique asymptote à la courbe

3. On a

$$\forall t,\ x'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2}$$

$x$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $y$ décroît sur $[0, \sqrt{\sqrt{5}-2}]$ et croît ensuite (les racines de $u^2+4u-1$ sont $-2 \pm \sqrt{5}$ et on en déduit que $\sqrt{\sqrt{5}-2}$ est l'unique racine positive de $t^4+4t^2-1$). On a $M(0) = (-1, 0)$ et la tangente à la courbe en ce point est verticale. On a $M(\sqrt{\sqrt{5}-2}) \approx (-0,6, -0,3)$ et la tangente à la courbe en ce point est horizontale. On en déduit l'allure de la courbe sur $\mathbb{R}^+$ et on complète par symétrie.




## Partie B.

1. (a) Le déterminant étant une forme $n$-linéaire et alternée, on ne change pas sa valeur en ajoutant un multiple d'une ligne à une autre. Ici, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ donne l'égalité demandée.

   (b) Dans le déterminant obtenu (et en explicitant $\varphi$) on peut factoriser la première ligne par $\frac{2}{a^2+1}$ et la première colonne par $\frac{a-b}{b^2+1}$ et la seconde colonne par $\frac{a-t}{1+t^2}$. On a donc

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \frac{2(a-b)(a-t)}{(b^2+1)(a^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} a+b & a+t \\ b^2-1 & t^2-1 \end{vmatrix}$$

   L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis une factorisation de la première colonne par $b-t$ donnent alors

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \frac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix}$$

2. (a) On suppose que $a \neq b$ (points distincts, $a+b \neq 0$ (points non symétriques par rapport à $Ox$) et $a, b \neq \pm 1$ (points différents de $O$). $M(t)$ est sur la droite $(AB)$ si $\overrightarrow{BA} = \binom{\varphi(a)-\varphi(b)}{a\varphi(a)-b\varphi(b)}$ et $\overrightarrow{M(t)A} = \binom{\varphi(a)-\varphi(t)}{a\varphi(a)-t\varphi(t)}$ sont colinéaires, c'est à dire si le déterminant de ces deux vecteurs est nul. On retrouve le déterminant de la question précédente. Comme $a \neq b$ et comme on veut un point différent de $A$ et de $B$ (et donc $a-t$ et $b-t$ non nuls), la condition devient

$$\begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix} = (t^2-1) - (a+t)(b+t) = 0$$

La condition s'écrit, après développement, $t = h(a,b)$. La droite $(AB)$ recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star B$. Par ailleurs, $h(a,b) = 1$ s'écrit $a + ab = a + b$ c'est à dire $(a-1)(b-1) = 0$ et ceci n'a pas lieu car $a, b \neq 1$. De même, $a, b \neq -1$ donne $h(a,b) \neq -1$. Ainsi, $A \star B$ n'est pas égal à l'origine (on n'y passe que pour une valeur du paramètre égale à $\pm 1$).

(b) L'hypothèse $A \neq P$ indique que $a \neq 0$. Le point $M(t)$ est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en $A$ si $\overrightarrow{M(t)A}$ est colinéaire à $(x'(a), y'(a))$ c'est à dire si le déterminant de ces deux vecteurs est nul. Ce déterminant vaut (on effectue l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$)

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(t) & \varphi'(a) \\ a\varphi(a)-t\varphi(t) & \varphi(a)+a\varphi'(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(t) & \varphi'(a) \\ \varphi(t)(a-t) & \varphi(a) \end{vmatrix}$$

Sur la première colonne, on peut factoriser par $a-t$. Sur la première ligne, on peut factoriser par $\frac{2}{a^2+1}$. On obtient, après calcul

$$\frac{2(2at+1+a^2)(t-a)^2}{(a^2+1)^2(t^2+1)}$$

Comme $a \neq 0$ et que l'on veut $t \neq a$, il y a annulation uniquement pour $t = -\frac{1+a^2}{2a} = h(a,a)$. Ainsi, la tangente à $\mathcal{C}$ en $A$ recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star A$.
On note que $h(a,a)$ n'est pas nul ni égal à $\pm 1$ (comme dans la question précédente). Ainsi, $A \star A$ est différent de $O$ et de $P$.

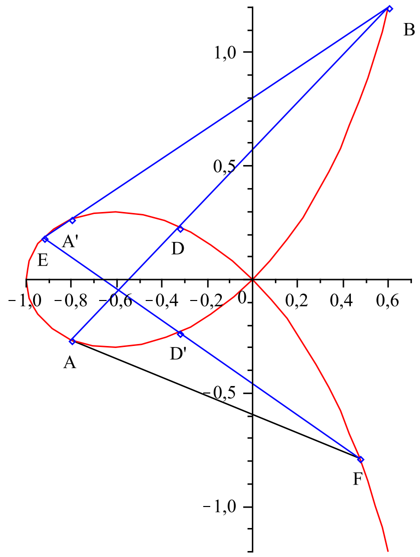
3. On a $D = M(h(a,b))$ puis (le signe $-$ st là pour traduire la symétrie) $E = M(h(-a,b))$ et enfin (idem)

$$F = M(h(-h(a,b), h(-a,b)))$$

Il reste à calculer

$$\begin{aligned} h(-h(a,b), h(-a,b)) &= h\left(\frac{1+ab}{a+b}, -\frac{1-ab}{b-a}\right) \\ &= \frac{(a+b)(b-a)+(1+ab)(ab-1)}{(b-a)(1+ab)-(1-ab)(a+b)} \\ &= \frac{(b^2-1)(1+a^2)}{2a(b^2-1)} \\ &= h(a,a) \end{aligned}$$

Ainsi, $F = M(h(a,a)) = A \star A$ et la question précédente indique que la droite $(FA)$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A$.




# Exercice 3.

## Partie A.

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Comme $u_n(t) \sim \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ et $v_n(t) \sim \frac{1}{4\pi^2 n^2}$, $\sum(u_n(t))$ et $\sum(v_n(t))$ sont absolument convergente par comparaison aux séries de Riemann. On a donc convergence simple de $\sum(u_n)$ et $\sum(v_n)$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On a $u_n'(t) = -\frac{2(t+2n\pi)}{(1+(t+2n\pi)^2)^2}$. Soit $N$ la partie entière de $\frac{a}{2\pi}+1$ ; pour tout $n \geq N$ et tout $t \in [-a,a]$, on a $n \geq \frac{a}{2\pi} \geq \frac{-t}{2\pi}$ ($t \geq -a$ donnant $a \geq -t$) et donc $u_n'(t) \leq 0$. Pour $n \geq N$, $u_n$ est ainsi décroissante sur $[-a,a]$ (sa dérivée y est négative) et

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = \max(|u_n(a)|, |u_n(-a)|) = u_n(-a)$$

   (b) $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ vaut $u_n(-a)$ à partir d'un rang certain rang $N$ et $\sum(u_n(-a))$ converge. $\sum(u_n)$ est donc normalement convergente sur $[-a,a]$ et donc aussi uniformément convergente sur cet ensemble. De même, comme $\forall x \geq 0,\ \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ (car $(1-x)^2 \geq 0$) on a

$$\forall n \geq N,\ \forall t \in [-a,a],\ |u_n'(t)| = \frac{2|t+2n\pi|}{1+|t+2n\pi|^2}|u_n(t)| \leq u_n(-a)$$

   Le majorant est indépendant de $t$ et est le terme général d'une série convergente. $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $[-a,a]$ et donc aussi uniformément convergente sur cet ensemble.

3. (a) Le cours nous donne le résultat suivant.

   **Théorème** : soit $(f_n)$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que
   i. $\sum(f_n)$ converge simplement sur $I$
   ii. $\sum(f_n')$ converge normalement sur tout segment de $I$
   Alors, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

   On l'utilise pour étudier les sommes des série s$\sum(u_n)$ et $\sum(v_n)$. On a la convergence simple des séries et la convergence normale des séries dérivées sur tout segment (tout segment étant inclu dans un segment centré sur 0). De plus $u_n$ et $v_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et le théorème s'applique. Comme $u_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $F$ l'est aussi et

$$F' = u_0' + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n' + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'$$

(b) La parité de $F$ découle de $u_n(-t) = v_n(t)$ et $v_n(-t) = u_n(t)$ ainsi que de la parité de $u_0$.

(c) On a

$$\begin{aligned} F(t+2\pi) &= u_0(t+2\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t+2\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t+2\pi) \\ &= u_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(t) + v_1(t+2\pi) + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(t+2\pi) \\ &= u_1(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(t) + u_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

et $F$ est $2\pi$-périodique.

## Partie B.

1. Par définition de $F$ et linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi u_0(x)\,dx + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(kx)u_n(x)\,dx + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(kx)v_n(x)\,dx$$

$|\cos(kx)u_n(x)| \leq |u_n(x)|$ et la normale convergence de $\sum(u_n)$ sur $[0,\pi]$ entraîne celle de la série de fonctions de terme général $x \mapsto \cos(kx)u_n(x)$. On est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale sur un segment. On procède de même pour l'autre interversion et on obtient

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\,dx$$

$F$ étant paire, ses coefficients de Fourier "en sinus" sont nuls et ceux en cosinus valent

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(x)\,dx \ \text{ et } \ \forall k \geq 1,\ a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx$$

*Au vu de le suite du sujet, il ne semble pas que l'on en attende plus à ce niveau.*

2. $F$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ (continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux suffirait), sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est $F$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\cos(kt)\,dt$$

On pose donc, pour la suite

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx$$

3. (a) $s \mapsto \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/s^2$ au voisinage de $+\infty$ (et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale est a fortiori convergente.

   (b) On peut ainsi écrire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds = \int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds$$

Dans l'expression de la question 1, on faitles changement de variables indiqués par l'énoncé pour obtenir

$$\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos(ks)}{1+s^2}\,dx - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\cos(kr)}{1+r^2}\,dr$$

On peut regrouper les sommes (convergentes) et les intégrales (relation de Chasles) pour obtenit

$$\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds$$

On en déduit finalement que

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ks)}{1+s^2}\,ds$$

## Partie C.

Je choisis de noter $f\ :\ (x,s) \mapsto \frac{\cos(xs)}{1+s^2}$.

1. Pour tout $x \geq 0$, $s \mapsto f(x,s)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $s \geq 0$, $x \mapsto f(x,s)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tous $x \geq 0$ et $s \geq 0$, $|f(x,s)| \leq \frac{1}{1+s^2}$ et le majorant est indépendant de $x$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètres, on peut affirmer que $\phi$ est continue sur $\mathbb{R}$. La domination précédente indique que

$$\forall x \in\ \mathbb{R},\ |\phi(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \phi(0) = \frac{\pi}{2}$$

2. (a) Le changement de variable $t = xs$ est licite pour $x > 0$ (c'est alors un changement affine licite) et donne

$$\forall x > 0,\ \phi(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,dt$$

   (b) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}$.
   Pour tout $x > 0$, $t \mapsto -\frac{2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tous réels $0 < a < b$,

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left|\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\right| \leq \frac{1}{a^2+u^2}$$

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left|-\frac{2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\right| \leq \frac{2b}{(a^2+u^2)^2}$$

Les majorants trouvés étant intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (continus et dominés par $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$), le théorème de régularité des intégrales à paramètres s'applique pour l'étude de $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,dt$. On obtient que $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et (dérivation d'un produit)

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,dt - 2x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

Avec la question 2.$a$ la formule devient

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - 2x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

(c) Dans l'intégrale ci-dessus, on pose $s = t/x$ pour obtenir

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds$$

3. (a) Pour tout $x > 0$, $s \mapsto \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $s \geq 0$, $x \mapsto \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}$.
Pour tout $x > 0$, $s \mapsto -\frac{s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tous réels $0 < a < b$,

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left|\frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\right| \leq \frac{1}{(1+s^2)^2}$$

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left|-\frac{s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\right| \leq \frac{s}{(1+s^2)^2}$$

Les majorants trouvés étant intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (continus et dominés par $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$), le théorème de régularité des intégrales à paramètres s'applique pour l'étude de $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds$ et indique que

$$\forall x > 0,\ \psi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds$$

Une intégration par parties donne (en primitivant $\frac{2s}{(1+s^2)^2}$ et en dérivant $\sin(xs)$)

$$\int_0^a \frac{2s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds = \left[-\frac{\sin(xs)}{(1+s^2)}\right]_0^a + x\int_0^a \frac{\cos(xs)}{1+s^2}\,ds$$

On peut passer à la limite $a \to +\infty$ pour obtenir

$$\forall x > 0,\ \psi'(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{1+s^2}\,ds = x\phi(x)$$

(b) On a $\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{\phi(x)}{x} + \frac{\psi(x)}{x}$. Comme $\phi$ et $\psi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\phi'$ l'est aussi. $\phi$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \phi''(x) = \frac{\phi'(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^2} + \frac{\psi'(x)}{x} - \frac{\psi(x)}{x^2}$$

Avec la relation rappelée en début de question et celle de la question précédente, on a alors

$$\forall x > 0,\ \phi''(x) = \phi(x)$$

4. On obtient l'existence de deux constantes $c_1$ et $c_2$ telles que

$$\forall x > 0,\ \phi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Par continuité de $\phi$ en 0, on a $c_1 + c_2 = \pi/2$ et comme $\phi$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ on en déduit que $c_1 = 0$. Finalement, on a

$$\forall x \geq 0,\ \phi(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{2}{\pi}\phi(k) = e^{-k}$$

5. La question $B.2$ donne alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}\cos(kt)$$

On remarque que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}\cos(kt) = Re\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-1+it})^k\right)$$

$(e^{-1+it})^k$ est le terme général d'une série géométrique convergente dont on sait calculer la somme qui vaut $\frac{e^{-1+it}}{1-e^{-1+it}}$. On remarque que

$$\frac{e^{-1+it}}{1-e^{-1+it}} = \frac{e^{-1}e^{it}(1-e^{-1}e^{-it})}{|1-e^{-1+it}|^2} = \frac{e^{-1}e^{it} - e^{-2}}{(1-e^{-1}\cos(t))^2 + (e^{-1}\sin(t))^2}$$

En passant à la partie réelle, on a finalement

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-1}\cos(t) - e^{-2}}{1 + e^{-2} - 2e^{-1}\cos(t)} = \frac{1-e^{-2}}{2(1-2e^{-1}\cos(t) + e^{-2})}$$