E4A 2002 (PSI 2)

Exercice 1

1° $z(t)=\lambda \Leftrightarrow \lambda t^4 - t^2 + \lambda = 0$. Le discriminant de cette équation en t^2 est $\Lambda = 1-4\lambda^2$. Donc

➔ Si $|\lambda| > \frac{1}{2}$, il n'y a aucun point d'intersection.

➔ Si $\lambda = \frac{1}{2}$, la solution double est $t^2 = 1$, soit $t = \pm 1$. On obtient deux points d'intersection, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

➔ Si $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, l'équation en t^2 a deux racines positives, ce qui donne 4 points d'intersection.

➔ Si $\lambda = 0$, la seule solution est $t = 0$. Le seul point d'intersection est l'origine.

➔ Si $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$, l'équation en t^2 a deux racines négatives et il n'y a donc aucun point d'intersection.

2° a) Remarquons que (Γ) est invariant par la symétrie par rapport à Oz parallèlement à xOy, deux points symétriques correspondant à deux valeurs opposées du paramètre t. Pour $\lambda \in J$, les 4 points d'intersection trouvés sont donc deux à deux symétriques ; étant situés dans (P_λ) qui est parallèle à xOy, ils sont deux à deux symétriques par rapport au point d'intersection de Oz avec (P_λ). Ce sont donc les sommets d'un parallélogramme.

b) Remarquons aussi que le changement de t en $\frac{1}{t}$ échange x et y sans changer z ce qui montre l'invariance de (Γ) par la symétrie par rapport au plan d'équation $x = y$ parallèlement au vecteur $(1,-1,0)$. Or le produit des racines de l'équation en t^2 étudiée au **1°** est égal à 1. Les solutions en t sont donc deux à deux inverses l'une de l'autre. Deux des côtés du parallélogramme sont donc dirigés par le vecteur $(1,-1,0)$.

En composant les deux symétries, on en déduit que les points de (Γ) de paramètre t et $-\frac{1}{t}$ se déduisent l'un de l'autre par la symétrie par rapport au plan d'équation $x = -y$ parallèlement au vecteur $(1,1,0)$ et donc que les deux autres côtés du parallélogramme sont donc dirigés par le vecteur $(1,1,0)$.

c) Les vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,-1,0)$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même norme, d' où le résultat.

3° Notons (α,β,λ) les coordonnées de l' un des sommets du rectangle. Les deux sommets adjacents ont pour coordonnées respectives (β,α,λ) et $(-\beta,-\alpha,\lambda)$. L' aire S du rectangle est donc égale à $\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}\sqrt{2(\alpha+\beta)^2} = 2\left|\alpha^2-\beta^2\right| = 2\left|\dfrac{t^2-t^6}{(1+t^4)^2}\right|$ où t est racine de l' équation étudiée en **1°**. D' où

$$S = 2\lambda\left|\frac{1-t^4}{1+t^4}\right| = 2\lambda\frac{\left|2-\dfrac{t^2}{\lambda}\right|}{\dfrac{t^2}{\lambda}} = \frac{\left|4\lambda^2-2\lambda t^2\right|}{t^2} = \frac{\left|4\lambda^2-1-\varepsilon\sqrt{1-4\lambda^2}\right|}{\dfrac{1+\varepsilon\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda}} = 2\lambda\sqrt{1-4\lambda^2}\ .$$

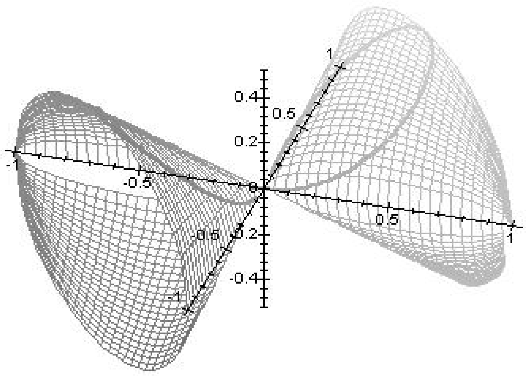
Remarques :

En écrivant $x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^4}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et $y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^4}}\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}$, on met en évidence une équation polaire de la projection de (Γ) sur xOy : $\rho = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^4}}, \cos\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \sin\vartheta = \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}$ ou encore . On "reconnaît" une lemniscate de Bernoulli.

Par ailleurs, la courbe (Γ) est tracée sur le cône d' équation$xy = z^2$.

```
> with(plots):
```

```
> F:=spacecurve([t/(1+t^4),t^3/(1+t^4),t^2/(1+t^4)],t=10..10,axes=boxed,
> numpoints=500,thickness=2):
> p:= proc(x,y) (x*y)^0.5 end:
> h:= proc(x) 1-x  end:
> hh:= proc(x) -1-x  end:
> G:=plot3d(p,0..1,0..h):
> H:=plot3d(-p,0..1,0..h):
> GG:=plot3d(p,-1..0,hh..0):
> HH:=plot3d(-p,-1..0,hh..0):
> display({F,G,H,GG,HH});
```



Exercice 2

1° a) Si $x = 0$, $u_n(x) = 0$ pour tout n et la série $\sum u_n(0)$ converge. Sinon, $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x^2}$ qui est le terme général d' une série convergente puisque $\alpha > 0$. Donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\left[0,+\infty\right[$.

b) $u'_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha}(1-nx^2)$. La fonction positive u_n admet donc son maximum pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\|u_n(x)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $\left[0,+\infty\right[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) $|u_n(x)| \le \dfrac{b}{n^\alpha\left(1+na^2\right)}$ $\forall x \in [a,b]$. Or $\dfrac{b}{n^\alpha\left(1+na^2\right)} \sim \dfrac{b}{a^2 n^{\alpha+1}}$ qui est le terme général d' une série convergente puisque $\alpha > 0$. Donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

d) i) Puisque tous les termes de la série sont positifs, $R_n(x) \ge \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)} \ge \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}\left(1+kx^2\right)}$. Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+kx^2} \ge \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{1+tx^2} = \frac{1}{x^2}\ln\frac{1+(2n+1)x^2}{1+(n+1)x^2}$. D' où $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\frac{2n+1}{n}}{1+\frac{n+1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ln 3 - \ln 2}{\sqrt{2}}$. La convergence de la série $\sum u_n$ n' est donc pas uniforme sur $[0,a]$, quel que soit $a > 0$.

2° **a)** Puisque $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ et que u_n est évidemment une fonction continue, S est continue sur $[a,b]$. Comme on peut choisir a et b arbitrairement dans $\mathbb{R}_+^*$, S est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Si $\alpha > 1/2$, $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$. Par le même argument, S est continue sur $[0,+\infty[$.

c) i) f est continue sur $[1,+\infty[$ et équivalente à $\dfrac{1}{xt^{\alpha+1}}$ lorsque $t \to +\infty$. Elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

ii) Comme f est décroissante, $\int_k^{k+i} f(t)dt \leq f(k)$; en sommant ces relations de k = 1 à $+\infty$, on obtient $\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq S(x)$.

iii) Par le changement de variable $\sqrt{t} = u$ (qui est bien un difféomorphisme de classe C^1 de $[1,+\infty[$ sur lui-même, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}\left(1-tx^2\right)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2xdu}{1+u^2x^2} = \frac{2}{x}\left[\text{Arc}\tan ux\right]_1^{+\infty} = \frac{2}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc}\tan x\right) = \frac{2}{x}\text{Arc}\tan\frac{1}{x}$.

iv) Pour $\alpha = 1/2$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$. Ce sera vrai a fortiori pour $\alpha \in \left]0, 1/2\right]$ puisque $S(x)$ est une fonction décroissante de α. Donc S n' est pas continue en 0.

Exercice 3

Première partie

1° Les coefficients de A et de B étant tous positifs, ceux de AB le sont aussi. De plus, la somme des coefficients de la i-ème ligne de AB s' écrit $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$ ce qui montre que $AB \in S$.

2° Il est alors immédiat par récurrence sur k que $A^k \in S$ pour tout $k \geq 1$. C' est vrai aussi pour k = 0 car $A^0 = I$.

3° $\displaystyle\|AX\| = \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \leq \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|x_k| \leq \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\|X\| = \|X\|$.

4° Notons $M = A - I$. Les coefficients m_{ij} de M vérifient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0$; par conséquent, les colonnes de la matrice M sont liées et 1 est bien une valeur propre de A. De plus, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

5° Soit X un vecteur propre associé à λ ; alors $AX = \lambda X$ d' où $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\| \leq \|X\|$ d' après **3°**. Comme X n' est pas le vecteur nul $|\lambda \leq 1|$.

6° **a)** i) Puisque $X \in Ker(A-\lambda I)^2$, $Y \in Ker(A-\lambda I)$. En appliquant k - 1 fois A à l' égalité définissant Y, il vient
$$\begin{cases} Y = AX - \lambda X \\ \lambda Y = A^2X - \lambda AX \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^{k-1}Y = A^kX - \lambda A^{k-1}X \end{cases}$$
. En combinant ces équations pour éliminer les termes A^jX intermédiaires (on multiplie la j-ème équation par λ^{k-j}) on trouve, pour $k \geq 1$, $A^kX = \lambda^kX + k\lambda^{k-1}Y$.

ii) Puisque $|\lambda| = 1$, la suite des vecteurs λ^kX est bornée, de même que la suite des vecteurs A^kX d' après la question **3°**. La suite des vecteurs $k\lambda^{k-1}Y$ l' est donc aussi, ce qui n' est possible que si Y = 0.

iii) Il résulte de ce qui précède que $Ker(A-\lambda I)^2 \subset Ker(A-\lambda I)$; comme l' inclusion inverse est évidente, on a l' égalité $Ker(A-\lambda I)^2 = Ker(A-\lambda I)$.

b) Montrons le résultat à démontrer par récurrence sur k. Il est vrai pour k = 2. Admettons le pour k - 1 et soit $X \in Ker(A-\lambda I)^k$ et $Y = (A-\lambda I)X$; alors $Y \in Ker(A-\lambda I)^{k-1} = Ker(A-\lambda I)$ d' où $X \in Ker(A-\lambda I)^2 = Ker(A-\lambda I)$ ce qui achève la démonstration, l' inclusion inverse étant évidente.

Deuxième partie

1° a) $\left|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right| = \frac{1}{p}\left|\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}\right| \leq \frac{2}{p|1-\lambda|}$ d' après **I. 5°**. Donc $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

b) Si $X \in Ker(A-\lambda I)$, $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k X \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

2° Si A est diagonalisable, tout vecteur X est somme de vecteurs propres, soit $X = \sum_{i=1}^{q} X^{(i)}$ avec $AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)}$. Alors $X_p = \sum_{i=1}^{q} X_p^{(i)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

3° a) En mettant A sous la forme $(A-\lambda I)+\lambda I$ et en remarquant que I commute avec toute autre matrice, on peut calculer A^k par application de la formule du binôme : $A^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (A-\lambda I)^j (\lambda I)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{k-j} (A-\lambda I)^j$. Si $X \in Ker(A-\lambda I)^q$, $A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X$.

b) On sait que pour k fixé, le coefficient du binôme C_k^j est maximal pour $j = \left[\frac{k}{2}\right]$ (partie entière) et augmente lorsque j varie de 0 à $\left[\frac{k}{2}\right]$. Donc si $k \geq 2q-2$, $C_k^j \lambda^{k-j} \leq C_k^{q-1}\lambda^{k-j} = \frac{k(k-1)\ldots(k-q+2)}{(q-1)!}\lambda^{k-j}$. Cette quantité, produit d' un polynôme et d' une fonction exponentielle de k tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$ car $|\lambda < 1|$.

c) Pour $p \geq q$, $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{q-1} A^k X + \sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{p}\sum_{k=q}^{p} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X$. Lorsque $p \to +\infty$, le premier terme de cette somme tend vers 0. De plus, il résulte de **b)** que $\frac{1}{p}\sum_{k=q}^{p} C_k^j \lambda^{k-j} = \frac{p-q+1}{p}\frac{1}{p-q+1}\sum_{k=q}^{p} C_k^j \lambda^{k-j} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ car la convergence d' une suite implique sa convergence au sens de Cesaro. Donc $X_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

4° a) Le théorème de Cayley-Hamilton montre que P_A est un polynôme annulateur de A. En supposant que les λ_j sont deux à deux distincts, le théorème de décomposition des noyaux affirme alors que $F = \left(\bigoplus_{j=0}^{s} Ker(A-\lambda_j I)^{k_j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^{r} Ker(A-\lambda_j I)^{q_j}\right)$. D' après la première partie,

$$F = \left(\bigoplus_{j=0}^{s} Ker(A-\lambda_j I)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^{r} Ker(A-\lambda_j I)^{q_j}\right).$$

b) Décomposons X dans cette somme directe : $X = X^{(0)}+\ldots+X^{(s)}+X^{(s+1)}+\ldots+X^{(r)}$. Alors $X_p = X_p^{(0)}+\ldots+X_p^{(s)}+X_p^{(s+1)}+\ldots+X_p^{(r)}$. Convenons que $\lambda_0 = 1$. Alors

➔ $X_p^{(0)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p} X = \frac{p+1}{p}X^{(0)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^{(0)}$.

➔ Pour $1 \leq j \leq s$, $X^{(j)}$ est un vecteur propre associé à une valeur propre de module 1 mais différente de 1. D' après **1° b)**, $X_p^{(j)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

➔ Pour $s+1 \leq j \leq r$, $X^{(j)}$ est un vecteur vérifiant les hypothèses de **3°** ; d' après **3° c)**, $X_p^{(j)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Par conséquent, $X_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^{(0)}$.