CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

2016

4 heures Calculatrices autorisées

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n ;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M, mais la notation M^T est également utilisable.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \dfrac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ définis ci-dessus. La partie III étudie le cas particulier des matrices de permutation. La partie IV étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

I Généralités

I.A – Propriétés élémentaires

I.A.1) Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

I.A.2) Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leqslant n!$ et qu'il n'y a pas égalité.

I.A.3) Démontrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe et compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A.4) Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Démontrer que $|\lambda| \leqslant n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

I.B – Étude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

I.B.1) Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$. Est-ce que, pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

II Deux problèmes d'optimisation

II.A – Étude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note

$$(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$$

II.A.1) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M|N)$ en fonction des coefficients de M et N.

On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

II.A.2) On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n$ telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n \quad \|A - M\| \leqslant \|A - N\|$$

II.A.3) Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A.

II.B – Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

II.B.1) Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n$ (noté y_n).

II.B.2) Démontrer que la suite $(y_k)_{k \geqslant 2}$ est croissante.

II.B.3) Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$.

Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = +\infty$.

II.B.4) Soient $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0,1[$.

Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leqslant \det(N')$.

En déduire que $x_n = y_n$.

III Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ dans lui-même (appelées *permutations*).

Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i, colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ.

On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.

III.A – Description de $\mathcal{P}_n$

III.A.1) Donner deux définitions d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et démontrer leur équivalence.

III.A.2) Démontrer que si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors son déterminant vaut 1 ou -1. Que penser de la réciproque ?

III.A.3) Démontrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et déterminer son cardinal.

III.B – Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

III.B.1) Soient σ et σ' deux éléments de S_n.

Démontrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

Justifier que l'application $\begin{cases} \mathbb{Z} \to S_n \\ k \mapsto \sigma^k \end{cases}$ n'est pas injective.

En déduire qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\sigma^N = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}$, où $\mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}$ désigne l'application identité sur l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

III.B.2) Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

III.B.3) Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

III.B.4) On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$ sont $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D.

a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les u_σ.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Démontrer qu'il existe un couple $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que les $n-1$ vecteurs $e_k - e_j$ $(k \in \{1, ..., n\}, k \neq j)$ appartiennent à V.

c) Conclure.

III.C – Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation. Que dire de la réciproque ?

IV Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

IV.A – Génération par une colonne aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

IV.A.1) Calculer la probabilité que $X_1, ..., X_n$ soient égales.

IV.A.2) Quelle est la loi de $S = X_1 + ... + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

IV.A.3) Soient i et j dans $\{1, ..., n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$

IV.A.4) Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)\,{}^t(U(\omega))$. L'application $M : \begin{cases} \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \omega \mapsto M(\omega) \end{cases}$ est ainsi une variable aléatoire.

a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{tr}(M(\omega)) \in \{0, ..., n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$.

c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0, 1\}$.

IV.A.5) Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

IV.A.6) Exprimer M^k en fonction de S et M.

Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ?

Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

IV.A.7) Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

IV.B – Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de la matrice M_k de la manière suivante

- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geqslant 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

IV.B.1) Dans toute cette question on utilise le langage Python. `M` désigne une matrice carrée d'ordre n. Ses lignes et ses colonnes sont numérotées de 0 à $n - 1$. L'expression `M[i,j]` permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne `i` et de la colonne `j` et `len(M)` donne l'ordre de la matrice `M`.

a) Écrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice `M`.

b) Écrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$. On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle $[0, 1[$ selon la loi uniforme.

c) À l'aide de la fonction `Bernoulli(p)`, écrire une fonction `Modifie(M,p)` qui modifie aléatoirement la matrice `M` suivant le principe décrit au IV.B ci-dessus.

d) Écrire une fonction `Simulation(n,p)` qui renvoie le plus petit entier k tel que M_k est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre `n` (qui peut être obtenue par `zeros((n,n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les M_k.

IV.B.2) Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

IV.B.3) Soient i et j dans $\{1, ..., n\}$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus : $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

IV.B.4) Pour un entier $k \geqslant 1$, donner la valeur de $P(T_{i,j} \geqslant k)$

IV.B.5) Soient $r \geqslant 1$ un entier et $S_r = N_1 + \cdots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

IV.B.6) On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.

b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m.

• • • FIN • • •