CENTRALE-SUPÉLEC 2008 - PSI - ÉPREUVE 1

Question préliminaire

On reconnaît l'algorithme d'exponentiation rapide, donc $f(a,b) = a^b$.

Preuve : Tout d'abord, l'algorithme "termine" puisque les valeurs prises par la variable k forment une suite strictement décroissante d'entiers naturels, on aura donc nécessairement $k = 0$ après un nombre fini d'étapes, ce qui termine la boucle.

Enfin, on note que l'expression $i\,j^k$ est un invariant de la boucle puisque, selon la parité de k, elle est transformée en $(ij)\,j^{k-1}$ ou en $i\,(j^2)^{\frac{k}{2}}$, soit toujours $i\,j^k$; avant le départ de la boucle, on a $i\,j^k = 1 \times a^b = a^b$, donc à la fin de la boucle, on a $i = i\,j^k$ (puisque $k = 0$), donc la fonction retourne $i = a^b$.

Partie I. Récurrence en dimension 1

I.A.
```
u:=proc(n) local x,k:
  x:=u0:
  for k from 1 to n do
    x:=a*x+b
  od:
  x
end:
```

I.B. On a $v_{n+1} = a\,u_n + k + b$, donc $v_{n+1} = a\,v_n \iff ak = b + k \iff k = \dfrac{b}{a-1}$.

I.C. La suite v est géométrique de raison a, de premier terme $v_0 = u_0 + \dfrac{b}{a-1}$.

Donc $v_n = a^n\Big(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\Big)$, puis

$$u_n = a^n\Big(u_0 + \frac{b}{a-1}\Big) - \frac{b}{a-1}\ .$$

I.D. • Si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$, alors la suite u est constante de valeur $\dfrac{b}{1-a}$, donc la série entière S a pour rayon de convergence $\rho = 1$ (sauf si $b = 0$, auquel cas $u_n = 0$ et $\rho = +\infty$).

• Si $u_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$, alors

- si $|a| > 1$, on a $|u_n| \sim K\,|a|^n$ avec $K = \Big|u_0 + \dfrac{b}{a-1}\Big| > 0$, donc $\rho = \dfrac{1}{|a|}$;

- si $|a| < 1$ et $b \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a} \neq 0$, d'où $\rho = 1$;

- si $|a| < 1$ et $b = 0$, alors $u_n = u_0\,a^n$ avec $u_0 \neq 0$, et $\rho = \dfrac{1}{|a|}$;

- si $a = -1$, comme $(u_0, b) \neq (0,0)$, la suite (u_n) prend exactement deux valeurs distinctes (donc au moins une est non nulle) et $\rho = 1$.

On observe que $\rho_S = \min\Big\{1\ ,\ \dfrac{1}{|a|}\Big\} = \dfrac{1}{\max\{1\ ,\ |a|\}}$.

I.E. Dans tous les cas, on a $\rho_S \leq 1$, donc $|z| < \rho_S \Longrightarrow |z| < 1$: on est donc assuré de la convergence de la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$. Par ailleurs, si $|z| < \rho_S$ et $z \neq 0$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^n = \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = \dfrac{S(z)-u_0}{z}$. Pour $|z| < \rho_S$ et $z \neq 0$, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - au_n - b)\, z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n - b \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\ &= \frac{S(z) - u_0}{z} - a\, S(z) - \frac{b}{1-z}\ . \end{aligned}$$

En remultipliant par z, on obtient l'équation, valable pour tout z tel que $|z| < \rho_S$:

$$(1 - az)\, S(z) - u_0 - \frac{bz}{1-z} = 0\ ,$$

d'où finalement $S(z) = u_0\, \dfrac{1}{1-az} + b\, \dfrac{z}{(1-z)(1-az)}$.

I.F. On a $\rho_G = +\infty$: en effet, les coefficients u_n ont une croissance géométrique, c'est-à-dire il existe une majoration de la forme $|u_n| \leq M\, K^n$ avec $M > 0$ et $K > 0$ et la série entière (exponentielle) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{MK^n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini, on conclut par comparaison. La suite est du cours.

I.G. Pour tout x réel (les séries entières entrant en jeu ont toutes pour rayon de convergence $+\infty$), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - au_n - b)\, \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!} - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} - b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= G'(x) - a\, G(x) - b\, e^x\ . \end{aligned}$$

La fonction G est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = b\, e^x$, d'où une expression de la forme $y = C\, e^{ax} + \dfrac{b}{1-a}\, e^x$. On dispose enfin de la condition initiale $y(0) = G(0) = u_0$, d'où finalement

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad G(x) = u_0\, e^{ax} + b\, \frac{e^x - e^{ax}}{1-a}\ .$$

I.H. On a aussi $u_n = G^{(n)}(0)$. Or, $G^{(n)}(x) = a^n u_0\, e^{ax} + b\, \dfrac{e^x - a^n e^{ax}}{1-a}$. On obtient donc

$$u_n = a^n \Big(u_0 + \frac{b}{a-1}\Big) - \frac{b}{a-1}$$

et on est content. Pour programmer le calcul de u_n, on peut (bêtement) écrire la procédure

```
U:=proc(n):
  a∧n*(u0-b/(1-a))+b/(1-a)
end:
```

ce qui nécessite le calcul de a^n. Si ce calcul est fait "naïvement" par le logiciel de calcul formel dont vous disposez (ce qui m'étonnerait), le temps de calcul est de l'ordre de n ce qui n'est pas mieux que la procédure du **I.A.** On peut obtenir un programme plus rapide (temps de calcul en $O(\log_2(n))$) en calculant a^n par l'algorithme d'exponentiation rapide présenté en préliminaire.

Partie II. Récurrence en dimension 2

II.A. Il résulte des hypothèses que la matrice M est diagonalisable, et est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a donc $M = PDP^{-1}$, où P est une matrice inversible. On a les relations

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(M) & = & \mathrm{Tr}(D) \\ \det(M) & = & \det(D) \end{cases} \iff \begin{cases} a+d & = \lambda + \mu \\ ad - bc & = \lambda\mu \end{cases}$$

qui permettent d'obtenir c et d en fonction de a, b, λ et μ, on obtient $d = \lambda + \mu - a$, puis $c = \dfrac{ad - \lambda\mu}{b} = \dfrac{a\lambda + a\mu - a^2 - \lambda\mu}{b}$. Le système (7) se réécrit alors de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a\lambda + a\mu - a^2 - \lambda\mu}{b} & \lambda + \mu - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} . \qquad (7')$$

Explicitons la matrice de passage P et son inverse. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système $MX = \lambda X$ est de rang 1 (puisque λ est valeur propre simple par hypothèse) et équivaut donc à une seule équation, par exemple $ax + by = \lambda x$, soit $(a-\lambda)x + by = 0$: le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$. De même, le sous-espace propre $E_\mu(M)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ \mu - a \end{pmatrix}$. Une matrice de passage P possible est donc $P = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda - a & \mu - a \end{pmatrix}$. On a ensuite

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\ {}^t(\mathrm{Com}P) = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} \mu - a & -b \\ a - \lambda & b \end{pmatrix} .$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a $U_{n+1} = MU_n$, donc $U_n = M^n\, U_0 = (PDP^{-1})^n\, U_0 = P\, D^n\, P^{-1}\, U_0$. Tous calculs faits, on obtient l'expression "simple" suivante :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} b(\mu - a)\lambda^n - b(\lambda - a)\mu^n & b^2(\mu^n - \lambda^n) \\ (\lambda - a)(\mu - a)(\lambda^n - \mu^n) & b\mu^n(\mu - a) - b\lambda^n(\lambda - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} .$$

II.B. Parlons tout de suite des rayons de convergence : de la question **II.A.**, il résulte que $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$, où A et B sont des constantes. En posant $R = \max\{|\lambda|\ ,\ |\mu|\}$ (rayon spectral de la matrice M), on a donc une majoration de la forme $|u_n| \leq K\, R^n$ où K est un réel strictement positif. Le rayon de convergence de la série entière S est alors au moins égal à $\dfrac{1}{R}$. Même chose pour le rayon de convergence de la série entière T. On peut donc choisir $\rho = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\max\{|\lambda|\ ,\ |\mu|\}}$.

Pour $|z| < \rho$ et $z \neq 0$, un calcul analogue à celui de la question **I.E.** conduit aux équations

$$\frac{S(z)-u_0}{z} - a\,S(z) - b\,T(z) = 0 \quad ; \quad \frac{T(z)-v_0}{z} - c\,S(z) - d\,T(z) = 0\ ,$$

c'est-à-dire au système linéaire $\begin{cases} (1-az)\ S(z) - bz\ T(z) = u_0 \\ -cz\ S(z) + (1-dz)\ T(z) = v_0 \end{cases}$. Le déterminant de ce système est

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1-az & -bz \\ -cz & 1-dz \end{vmatrix} = 1-(a+d)z+(ad-bc)z^2 = (1-\lambda z)(1-\mu z)$$

qui est non nul pour $|z| < \rho = \min\left\{\dfrac{1}{|\lambda|}\ ,\ \dfrac{1}{|\mu|}\right\}$. La résolution par les formules de Cramer donne

$$S(z) = \frac{1-dz}{D(z)}\,u_0 + \frac{bz}{D(z)}\,v_0 \qquad ; \qquad T(z) = \frac{cz}{D(z)}\,u_0 + \frac{1-az}{D(z)}\,v_0\ .$$

II.C. Puisqu'il existe une majoration de la forme $|u_n| \leq K\,R^n$, on déduit comme en **I.F.** que la série entière G a un rayon de convergence infini, même chose pour H.

II.D. Les fonctions G et H sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme (cours sur les séries entières). Les relations évidentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-au_n-bv_n)\frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1}-cu_n-dv_n)\frac{x^n}{n!} = 0$$

conduisent au système différentiel linéaire

$$\begin{cases} G'(x) = a\ G(x) + b\ H(x) & \mathbf{(1)} \\ H'(x) = c\ G(x) + d\ H(x) & \mathbf{(2)} \end{cases} \quad , \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} G' \\ H' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}\ .$$

II.E. On bidouille : la combinaison linéaire $d \times \mathbf{(1)} - b \times \mathbf{(2)}$ donne la relation

$$d\,G'(x) - b\,H'(x) = (ad-bc)\,G(x) = \lambda\mu\,G(x)\ .$$

Par ailleurs, en dérivant $\mathbf{(1)}$, on obtient

$$G'' = a\,G' + b\,H' = a\,G' + \big[d\,G' - (d\,G' - b\,H')\big] = (a+d)\,G' - \lambda\mu\,G = (\lambda+\mu)G' - \lambda\mu\,G\ .$$

Calcul et résultat analogues pour H. Les fonctions G et H sont donc solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' - (\lambda+\mu)\,y' + \lambda\mu\,y = 0\ . \qquad \mathbf{(E)}$$

La famille (G, H) est un système fondamental de solutions de **(E)** si et seulement si leur wronskien $W = GH' - G'H$ est non nul, soit encore si et seulement si $W(0) \neq 0$, donc si et seulement si $u_1 v_0 - u_0 v_1 \neq 0$. Comme $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, cette condition s'écrit finalement

$$(a-d)\, u_0\, v_0 - c\, u_0^2 + b\, v_0^2 \neq 0\ .$$

II.F. L'équation caractéristique de **(E)** est $(r-\lambda)(r-\mu) = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, les solutions de **(E)** sont les combinaisons linéaires de $x \mapsto e^{\lambda x}$ et de $x \mapsto e^{\mu x}$. On a donc $G(x) = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{\mu x}$ et $H(x) = C\, e^{\lambda x} + D\, e^{\mu x}$, où A, B, C, D sont des constantes. Les conditions initiales $\begin{cases} G(0) = u_0 \\ G'(0) = u_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} H(0) = v_0 \\ H'(0) = v_1 \end{cases}$ donnent, en tenant compte aussi des relations $u_1 = a u_0 + b v_0$ et $v_1 = c u_0 + d v_0$,

$$G(x) = u_0\, \frac{(\mu - a)\, e^{\lambda x} - (\lambda - a)\, e^{\mu x}}{\mu - \lambda} + v_0\, \frac{b\,(e^{\mu x} - e^{\lambda x})}{\mu - \lambda}\ .$$

$$H(x) = u_0\, \frac{c\,(e^{\mu x} - e^{\lambda x})}{\mu - \lambda} + v_0\, \frac{(\mu - d)\, e^{\lambda x} - (\lambda - d)\, e^{\mu x}}{\mu - \lambda}\ .$$

Partie III. Transformation de Laplace

III.A. Si f est CDI(α), notons M un majorant de $|f(t)|\, e^{-\alpha t}$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$. Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p) > \alpha$, on a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(t)\, e^{-pt}| = |f(t)|\, e^{-\,\mathrm{Re}(p)\, t} = |f(t)| e^{-\alpha t}\, e^{-(\mathrm{Re}\, p - \alpha) t} \leq M\, e^{-(\mathrm{Re}\, p - \alpha) t}\ ,$$

la fonction $t \mapsto e^{-(\mathrm{Re}\, p - \alpha) t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-pt}$ et donc la convergence de l'intégrale impropre $\mathrm{Lap}(f)(p)$.

III.B. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit p un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(p) > \alpha$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x f'(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \Big[f(t)\, e^{-pt} \Big]_0^x + p \int_0^x f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\ . \qquad \textbf{(*)}$$

De **III.A.** ci-dessus, il résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, e^{-px} = 0$ et aussi que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ est convergente, le second membre de l'égalité **(*)** a donc une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit que l'intégrale impropre $\mathrm{Lap}(f')(p)$ converge et l'égalité

$$\mathrm{Lap}(f')(p) = p \cdot \mathrm{Lap}(f)(p) - f(0)\ .$$

III.C. En admettant tout... on a

$$\mathrm{Lap}(G)(p) = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \Big)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\ .$$

Par ailleurs, en posant $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ (ces intégrales impropres sont bien convergentes dès que $\mathrm{Re}\, p > 0$), une intégration par parties donne la relation de récurrence $I_n = \dfrac{n}{p}\, I_{n-1}$ pour $n \geq 1$, donc $I_n = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Finalement,

$$\mathrm{Lap}(G)(p)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{p^{n+1}}=\frac{1}{p}\,S\Big(\frac{1}{p}\Big)\ .$$

Remarque. La condition $\mathrm{Re}\,p>0$ ne suffit pas à justifier la convergence des séries et intégrales entrant en jeu dans ce calcul. Par contre, si l'on suppose $\mathrm{Re}(p)>\dfrac{1}{\rho}$, où ρ est le rayon de convergence de la série entière S, alors les intégrales rencontrées existent et l'interversion série-intégrale se justifie facilement à l'aide du théorème d'intégration terme à terme figurant au programme de PSI.

III.D. On a l'équation différentielle $G'(x)-a\,G(x)=b\,e^x$. La linéarité (évidente) de la transformation de Laplace donne

$$\mathrm{Lap}(G')(p)-a\cdot\mathrm{Lap}(G)(p)=b\cdot\mathrm{Lap}(\exp)(p)\ .$$

Or, $\mathrm{Lap}(\exp)(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(1-p)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p-1}$ si $\mathrm{Re}(p)>1$. On obtient donc, en utilisant **III.B.** :

$$(p-a)\cdot\mathrm{Lap}(G)(p)-G(0)=\frac{b}{p-1}\ ,$$

soit, avec les résultats de **III.C.** : $S\Big(\dfrac{1}{p}\Big)=\dfrac{p}{p-a}\Big(u_0+\dfrac{b}{p-1}\Big)$. En posant $x=\dfrac{1}{p}$ avec p réel dans $]1,+\infty[$, on obtient, pour $x\in]0,1[$ en tout cas, la relation

$$S(x)=\frac{1}{1-ax}\Big(\frac{bx}{1-x}+u_0\Big)\ ,$$

ce qui est la même expression qu'en **I.E.**

Partie IV. Une récurrence explosive

IV.A.1. Cet encadrement résulte des inégalités

$$u^2+v^2-2uv=(u-v)^2\geq 0\qquad\text{et}\qquad u^2+v^2+2uv=(u+v)^2\geq 0\ .$$

IV.A.2. Posons $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$. On a alors $U_{n+1}=M_n\,U_n$, avec $M_n=\begin{pmatrix}an & b\\ c & dn\end{pmatrix}$. Or, $\det(M_n)=adn^2-bc\neq 0$ puisque $\dfrac{bc}{ad}$ n'est pas le carré d'un entier. La matrice M_n est donc inversible pour tout entier naturel n et, de $U_0\neq 0$, on déduit $U_n\neq 0$ pour tout n, donc $\omega(n)=\|U_n\|^2>0$.

On calcule

$$\begin{aligned}\omega(n+1)&=u_{n+1}^2+v_{n+1}^2=(anu_n+bv_n)^2+(cu_n+dnv_n)^2\\&=n^2\,(a^2u_n^2+d^2v_n^2)+2\,(ab+cd)\,n\,u_nv_n+b^2v_n^2+c^2u_n^2\ .\end{aligned}$$

Comme $2\,|u_nv_n|\leq u_n^2+v_n^2=\omega(n)$, on peut majorer, en posant $A=\max\{a^2,d^2\}$ et $B=\max\{b^2,c^2\}$:

$$\omega(n+1)\leq A\,n^2\,\omega(n)+|ab+cd|\,n\,\omega(n)+B\,\omega(n)\ ,$$

donc $\dfrac{\omega(n+1)}{n^2\,\omega(n)} \leq \beta(n)$, avec $\beta(n) = A + \dfrac{|ab+cd|}{n} + \dfrac{B}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

De même, $\omega(n+1) \geq C\,n^2\,\omega(n) - |ab+cd|\,n\,\omega(n) + D\,\omega(n)$, avec $C = \min\{a^2, d^2\}$ et $D = \min\{b^2, c^2\}$, donc $\dfrac{\omega(n+1)}{n^2\,\omega(n)} \geq \alpha(n)$, avec $\alpha(n) = C - \dfrac{|ab+cd|}{n} + \dfrac{D}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} C > 0$.

IV.B.1. Notons ρ_S et ρ_T les rayons de convergence respectifs des séries entières S et T. On a $v_n = \dfrac{1}{b}(u_{n+1} - a\,n\,u_n)$, donc, si $|z| < \rho_S$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_{n+1}z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nu_n z^n$ (qui ont le même rayon de convergence, c'est classique) convergent, d'où la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n z^n$: on en déduit que $\rho_T \geq \rho_S$. De même, de la relation $u_n = \dfrac{1}{c}\,(v_{n+1} - d\,n\,v_n)$, on déduit $\rho_S \geq \rho_T$. Finalement, $\rho_S = \rho_T$.

Posons $r(n) = \sqrt{\omega(n)} = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$. Alors, pour n assez grand (dès que $\alpha(n) > 0$), on a

$$n\,\sqrt{\alpha(n)} \leq \frac{r(n+1)}{r(n)} \leq n\,\sqrt{\beta(n)}\ .$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\sqrt{\alpha(n)} = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{r(n+1)}{r(n)} = +\infty$ et, par la règle de d'Alembert, on déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r(n)z^n$ a un rayon de convergence nul. De l'inégalité $r(n) = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq |u_n| + |v_n|$, on déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(|u_n| + |v_n|)z^n$ a aussi un rayon de convergence nul, mais cette dernière série entière a un rayon de convergence au moins égal au minimum des rayons de convergence des séries entières S et T, donc $0 \geq \min\{\rho_S, \rho_T\} = \rho_S = \rho_T$, et finalement $\rho_S = \rho_T = 0$.

IV.B.2. De la même façon que ci-dessus, de $\dfrac{v_n}{n!} = \dfrac{1}{b}\left((n+1)\,\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} - an\,\dfrac{u_n}{n!}\right)$, on déduit $\rho_H \geq \rho_G$, puis finalement $\rho_G = \rho_H$. Posons $\rho = \rho_G = \rho_H$.

On a $\dfrac{|u_n|}{n!} \leq \dfrac{r(n)}{n!} \leq \dfrac{|u_n| + |v_n|}{n!}$, et les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{|u_n|}{n!}z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{|u_n| + |v_n|}{n!}z^n$ ont toutes deux pour rayon de convergence ρ (raisonnement analogue à la question précédente) donc, par encadrement, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{r(n)}{n!}z^n$ a aussi pour rayon de convergence ρ.

Mais, en posant $w_n = \dfrac{r(n)}{n!}$, on a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{r(n+1)}{(n+1)\,r(n)} \leq \sqrt{\beta(n)}$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\beta(n)} = \sqrt{A} = \max\{|a|, |d|\}$. On en déduit (facilement) que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{\max\{|a|, |d|\}}$, d'où la conclusion.

IV.C. Supposons $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$q_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)\,v_{n+1}} = \frac{a\,n\,u_n + b\,v_n}{(n+1)\,(c\,u_n + d\,n\,v_n)} = \frac{a\,n^2\,q_n + b}{n(n+1)\,(c\,q_n + d)}\ .$$

Donc $q_{n+1} = \varphi_n(q_n)$, avec $\varphi_n(x) = \dfrac{a\,n^2\,x + b}{n(n+1)\,(cx+d)}$.

IV.D. q:=proc(q1,eps):

```
    x:=evalf(q1): n:=1:
    y:=(a*x+b)/2/(c*x+d):
    while abs(x-y)>eps do
      print(x):
      n:=n+1:
      x:=y:
      y:=(a*n^2*x+b)/n/(n+1)/(c*x+d)
    od
  end:
```

IV.E. Dans $]-r,r[$, avec $r = \dfrac{1}{\max\{|a|,|d|\}}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\,u_n\,\frac{x^n}{n!} = x\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x\,G'(x)$. Les relations évidentes proposées par l'énoncé conduisent, dans $]-r,r[$, au système différentiel

$$\Big\{(1-ax)\,G'(x) = b\,H(x) \quad ; \quad (1-dx)\,H'(x) = c\,G(x)\Big\}\ .$$

IV.F. En redérivant la première relation, on obtient

$$-a\,G'(x) + (1-ax)\,G''(x) = b\,H'(x) = \frac{bc}{1-dx}\,G(x)\ .$$

La fonction G est donc solution sur $]-r,r[$ de l'équation différentielle

$$(1-ax)(1-dx)\,y'' - a(1-dx)\,y' - bc\,y = 0\ . \qquad \textbf{(E)}$$

On montre de même que H est solution sur $]-r,r[$ de l'équation différentielle

$$(1-ax)(1-dx)\,y'' - d(1-ax)\,y' - bc\,y = 0\ .$$

IV.G. Supposons que l'équation différentielle **(E)** admette une solution polynomiale y de degré n exactement, avec $n\in\mathbb{N}$, soit $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k$ avec $\alpha_n \neq 0$. L'examen du coefficient de x^n dans l'équation **(E)** conduit à la relation $n(n-1)ad + nad - bc = 0$, soit $\dfrac{bc}{ad} = n^2$, donc le réel $\dfrac{bc}{ad}$ est le carré d'un nombre entier.

Supposons réciproquement $\dfrac{bc}{ad} = n^2$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons alors l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Phi : P \mapsto \Phi(P) = (1-aX)(1-dX)\,P'' - a(1-dX)\,P' - bc\,P$.
C'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la linéarité est immédiate et on a clairement $\deg\big(\Phi(P)\big) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P). On vérifie que le polynôme $\Phi(X^n)$ est de degré au plus $n-1$ (son coefficient de X^n est $n^2ad - bc = 0$), on en déduit que $\mathrm{Im}(\Phi)\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$: l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas surjectif, donc n'est pas injectif (dimension finie), il existe donc une solution de l'équation différentielle **(E)** qui est une fonction polynomiale non nulle de degré au plus n.