Centrale PSI1 2007
un corrigé

Préliminaires.

1. Une trajectoire γ est paramétrée par $t \mapsto X(t) = (x(t), x'(t))$ où x est solution de l'équation différentielle du second ordre. En un point non singulier $X(t)$ de la courbe, la tangente à la courbe est dirigée par $(x'(t), x''(t)) = \Phi(X(t))$. Le champ $\Phi(X)$ est donc celui des vecteurs tangents.

2. Soit g la fonction définie par $g(t) = F(X(t)) = F(x(t), x'(t))$. g est dérivable sur I et

$$\forall t \in I,\ g'(t) = x'(t)x''(t) + x'(t)f'(x(t)) = 0$$

car $x''(t) = -f'(x(t))$. g est constante sur l'INTERVALLE I puisqu'à dérivée nulle sur cet intevalle.

1 Premiers exemples.

A.1. L'équation différentielle est

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

C'est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$. D'après le cours, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $Vect(t \mapsto \cos(\omega t), t \mapsto \sin(\omega t))$.
Une solution $x : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ est d'énergie h si et seulement si $F(x(0), x'(0)) = h$ c'est à dire $F(a, b\omega) = h$ ou encore

$$a^2 + b^2 = \frac{2h}{\omega^2}$$

Cette relation a lieu si et seulement si il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\theta)$ et $b = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin(\theta)$. Les solutions d'énergie h sont donc les fonctions

$$t \mapsto \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t - \theta)$$

Ces solutions sont $\frac{2\pi}{\omega}$-périodiques.

A.2. Les trajectoires associées sont paramétrées par

$$t \mapsto \left(\frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t - \theta), \sqrt{2h}\sin(\omega t - \theta)\right)$$

Une équation cartésienne de ces trajectoires est

$$x^2 + \frac{y^2}{\omega^2} = 1$$

Il s'agit d'une ellipse de centre l'origine, de sommets $(0, \pm\omega)$ et $(\pm 1, 0)$. Le sens de parcours de l'ellipse dépend du signe de ω : sens trigonométrique si $\omega > 0$ et horaire sinon.

A.3. Soit x la solution correspondant à $X_0 = (0, 0)$ alors $x(0) = x'(0) = 0$. Comme $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, on a $a = b = 0$ et x est la solution nulle. On a alors

$$\forall t,\ X(t) = (0, 0)$$

$F(x, y) = 0$ équivalant à $x = y = 0$, la seule trajectoire d'énergie nulle est celle réduite à l'origine.

B.1. L'équation différentielle est

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

C'est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - \omega^2 = 0$. D'après le cours, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $Vect(t \mapsto \mathrm{ch}(\omega t), t \mapsto \mathrm{sh}(\omega t))$.

B.2. Une solution $x : t \mapsto a\mathrm{ch}(\omega t) + b\mathrm{sh}(\omega t)$ est d'énergie h si et seulement si $F(x(0), x'(0)) = h$ c'est à dire $F(a, b\omega) = h$ ou encore

$$b^2 - a^2 = \frac{2h}{\omega^2}$$

- Si $h > 0$, cette relation a lieu si et seulement s'il existe θ tel que

$$(b, a) = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}(\mathrm{ch}(\theta), \mathrm{sh}(\theta)) \quad \text{ou} \quad (b, a) = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}(-\mathrm{ch}(\theta), \mathrm{sh}(\theta))$$

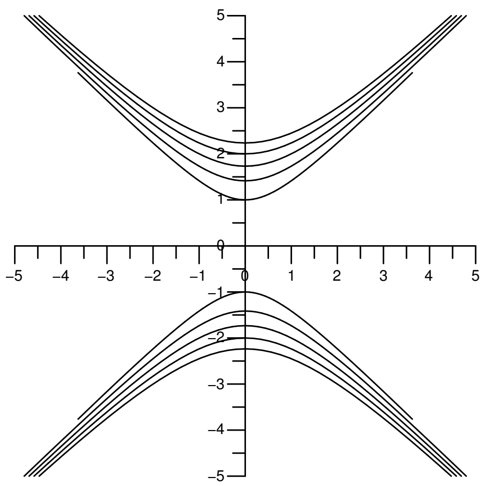
Les solutions correspondantes sont alors

$$x : t \mapsto \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\mathrm{sh}(\omega t + \theta) \quad \text{ou} \quad x : t \mapsto -\frac{\sqrt{2h}}{\omega}\mathrm{sh}(\omega t - \theta)$$

Les trajectoires sont alors paramétrées par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\mathrm{sh}(\omega t + \theta) \\ \sqrt{2h}\mathrm{ch}(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad t \mapsto -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\mathrm{sh}(\omega t - \theta) \\ \sqrt{2h}\mathrm{ch}(\omega t - \theta) \end{pmatrix}$$

On a des hyperboles. Les premières sont dans le demi-plan supérieur et sont parcourues de gauche à droite (en supposant $\omega > 0$). Les secondes dans le demi-plan inférieur et sont parcourues de droite à gauche (en supposant $\omega > 0$).



- Si $h = 0$, la relation a lieu si et seulement si $a^2 = b^2$. Les solutions correspondantes sont alors

$$x : t \mapsto a(\mathrm{ch}(\omega t) + \mathrm{sh}(\omega t)) \quad \text{ou} \quad x : t \mapsto a(\mathrm{ch}(\omega t) - \mathrm{sh}(\omega t))$$

Les trajectoires sont paramétrées par

$$t \mapsto ae^{\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad t \mapsto ae^{-\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$, il s'agit de demi-droite. Pour $\omega > 0$, la première est parcourue depuis l'origine (non atteinte) vers $+\infty$ et la seconde de l'infini jusqu'à l'origine (non atteinte). Ces demi-droites correspondent aux cas limite des hyperboles précédentes (asymptotes).
Si $a = 0$, on obtient uniquement l'origine.

- Si $h < 0$, la relation a lieu si et seulement s'il existe θ tel que

$$(a,b) = \frac{\sqrt{-2h}}{\omega}(\mathrm{ch}(\theta), \mathrm{sh}(\theta)) \quad \text{ou} \quad (a,b) = \frac{\sqrt{-2h}}{\omega}(-\mathrm{ch}(\theta), \mathrm{sh}(\theta))$$

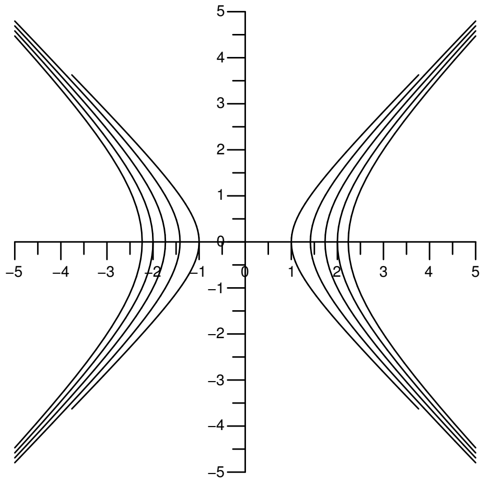
Les solutions correspondantes sont alors

$$x : t \mapsto \frac{\sqrt{-2h}}{\omega}\mathrm{ch}(\omega t + \theta) \quad \text{ou} \quad x : t \mapsto -\frac{\sqrt{-2h}}{\omega}\mathrm{ch}(\omega t - \theta)$$

Les trajectoires sont alors paramétrées par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-2h}}{\omega}\mathrm{ch}(\omega t + \theta) \\ \sqrt{-2h}\mathrm{sh}(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad t \mapsto -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-2h}}{\omega}\mathrm{ch}(\omega t - \theta) \\ \sqrt{-2h}\mathrm{sh}(\omega t - \theta) \end{pmatrix}$$

On a des hyperboles. Les premières sont dans le demi-plan droit et sont parcourues de bas en haut (en supposant $\omega > 0$). Les secondes dans le demi-plan gauche et sont parcourues de haut en bas (en supposant $\omega > 0$).



B.3. Soit x la solution correspondant à $X_0 = (0,0)$ alors $x(0) = x'(0) = 0$. Comme $x(t) = a\mathrm{ch}(\omega t) + b\mathrm{sh}(\omega t)$, on a $a = b = 0$ et x est la solution nulle. On a alors

$$\forall t,\ X(t) = (0,0)$$

La trajectoire est alors réduite à l'origine.
Les trajectoire d'énergie nulle ont été déterminées en $B.2$ (quatre demi-droites et l'origine).

2 Propriétés générales des trajectoires.

A.1. Soient $I^+ = \{t \geq x_0/\ \forall x \in [x_0, t],\ f(x) < h\}$ et$I^- = \{t \leq x_0/\ \forall x \in [t, x_0],\ f(x) < h\}$. On a $\frac{y_0^2}{2} + f(x_0) = h$ et $y_0^2 > 0$. Ainsi, $f(x_0) < h$ et I^+ et I^- sont non vide car il contiennent x_0. I^+ peut être ou non majorée et I^- peut être ou non minoré.

- Si I^+ est majoré et I^- est minoré, on peut poser $b = \sup(I^+)$ et $a = \inf(I^-)$. Soit $u \in]a, b[$; par définition des bornes supérieure et inférieure, on peut trouver $t_1 \in I^-$ et $t_2 \in I^+$ tels que $t_1 \leq u \leq t_2$. On a alors $f(x) < h$ pour $x \in [t_1, x_0]$ et pour $x \in [x_0, t_2]$. C'est donc vrai sur $[t_1, t_2]$ et donc en u. On a ainsi
$$\forall u \in]a, b[,\ f(u) < h$$
Par continuité de f, on a $f(a) \leq h$ et $f(b) \leq b$. Si l'une de ces inégalité était stricte, f resterait $< h$ à droite de b ou à gauche de a ce qui contredirait le caractère maximal de b ou minimal de a. On a donc $f(a) = h$ et $f(b) = h$. Tout intervalle contenant strictement $]a, b[$ contient donc au moins un élément x tel que $f(x) \geq h$ et $]a, b[$ est ainsi maximal. Enfin, cet intervalle est non vide car $a < x_0 < b$ (car $f(a) = f(b) = h$ et $f(x_0) < h$ indique que $a \neq x_0$ et $b \neq x_0$)
- Sinon, on peut reprendre le même type de preuve avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (il y a alors moins de choses à prouver...).

On a ici prouvée l'existence d'un ouvert non vide maximal $I(x_0)$ convenable. Si $]a, b[$ et $]a', b'[$ sont maximaux et convenables alors $]\min(a, a'), \max(b, b')[$ est aussi convenable et, par maximalité, $a = a' = \min(a, a')$ et $b = b' = \max(b, b')$. On a donc aussi l'unicité voulue.

A.2. Comme $F(X(t)) = h$, on a
$$x'(t)^2 = 2(h - f(x(t)))$$
Pour t proche de 0 (t dans un intervalle J à préciser), $x(t)$ est proche de x_0 et donc $f(x(t)) < h$. On a alors
$$\forall t \in J,\ x'(t) = \pm\sqrt{2(h - f(x(t)))}$$
Sur l'intervalle J, la relation précédente montre que x' ne s'annule pas. Comme c'est une fonction continue, elle garde un signe constant. Or, $x'(0) = y_0 > 0$ et donc
$$\forall t \in J,\ x'(t) = \sqrt{2(h - f(x(t)))}$$

A.3. La fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(h-f(u))}}$ est continue sur l'intervalle $I(x_0)$ et $x_0 \in I(x_0)$. Le théorème fondamental indique alors que τ est une primitive de cette fonction sur $I(x_0)$. τ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I(x_0)$ et
$$\forall x \in I(x_0),\ \tau'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(h - f(x))}} > 0$$
τ est donc un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $I(x_0)$ dans
$$J(x_0) = \left] \lim_{x \to a} \tau(x), \lim_{x \to b} \tau(x) \right[$$
L'équation obtenue en $A.2$ peut alors s'écrire
$$\forall t \in J,\ x'(t)\tau'(x(t)) = 1$$
Comme $0 \in J$, on peut intégrer cette égalité entre 0 et $t \in J$ pour obtenir
$$\forall t \in J,\ \tau(x(t)) - \tau(x(0)) = t$$
Or, $x(0) = x_0$ et donc $\tau(x(0)) = 0$. On a donc
$$\forall t \in J,\ \tau(x(t)) = t$$
Tant que $t \in J(x_0)$, $\tau^{-1}(t) \in I(x_0)$ et on peut remonter le calcul précédent pour montrer que τ^{-1} est solution sur J de l'équation obtenue en $A.2$.

B. Le calcul précédent indique que $\psi'(t) = \sqrt{2(h - f(\psi(t)))}$ et donc que

$$\psi(t)^2 = 2(h - f(\psi(t)))$$

En dérivant cette relation, on obtient

$$2\psi'(t)\psi(t) = -2\psi'(t)f'(\psi(t))$$

Comme $\psi'(t) \neq 0$ (ψ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $J(x_0)$ sur $I(x_0)$), on a donc $\psi'(t) = -f'(\psi(t))$ et $\Psi : t \mapsto (\psi(t), \psi'(t))$ est solution de (S) sur $J(x_0)$.

C.1. Comme X_1 est solution de (S) sur $J(x_0)$, on a

$$\forall t \in J(x_0),\ F(X_1(t)) = F(X_1(0)) = F(X_0) = h$$

On en déduit que

$$\forall t \in J(x_0),\ x_1'(t)^2 = 2(h - f(x_1(t)))$$

En particulier,

$$\forall t \in J_1,\ x_1'(t) = \sqrt{2(h - f(x_1(t)))}$$

La fonction $g : x \mapsto \sqrt{2(h - f(x))}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I(x_0)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy

$$x'(t) = g(x(t)),\ x(0) = x_0$$

admet une unique solution maximale. x_1 et ψ convenant, elles sont égales sur $]u, v[$. Si on avait $\alpha < u$, on aurait, par continuité, x_1 et ψ égales sur $[u, v[$. On aurait donc $x_1'(u) = \psi'(u) > 0$ et x_1' resterait strictement positive à gauche de u (par continuité) ce qui contredirait le caractère maximal de J_1. On a donc $\alpha = u$ et de même $\beta = v$.

C.2. On vient de voir qu'une solution de (S) définie sur $J(x_0)$ et valant X_0 en 0 est nécessairement Ψ. On a aussi vu, réciproquement, que Ψ convient effectivement. On a donc l'existence et l'unicité demandée.

D. Soit $Z : t \mapsto (x(t), x'(t))$ une solution de (S) sur $]-\beta, -\alpha[$ telle que $Z(0) = (x_0, -y_0)$. On a donc $x''(t) = -f'(x(t))$ pour $t \in]-\beta, -\alpha[$ et $x(0) = x_0$, $x'(0) = -y_0$. Posons

$$Z_1 : t \in]\alpha, \beta[\mapsto (x(-t), -x'(-t)) = (x_1(t), y_1(t))$$

On a alors $x_1'(t) = -x'(-t) = y_1(t)$ et $y_1'(t) = x''(-t) = -f'(x(-t)) = -f'(x_1(t))$ et $Z_1(0) = (x(0), -x'(0)) = (x_0, y_0)$. Z_1 est donc une solution de (S) définie sur $J(x_0)$ et valant X_0 en 0. D'après la question précédente, $Z_1 = \Psi$ et donc

$$\forall t \in]\alpha, \beta[,\ x(-t) = \psi(t)$$

On en déduit que

$$\forall t \in]-\beta, -\alpha[,\ Z(t) = (\psi(t), -\psi'(-t))$$

On vient de voir qu'il y au plus une solution Z convenable. Le même calcul montre que, réciproquement, cette solution convient.

E.1.

a. On a vu en question $II.A.1$ (par un argument de continuité) que

$$f(a) = f(b) = h$$

Le taux d'accroissement $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}$ est alors négatif pour δ au voisinage à droite de 0 ($f(a+\delta)$ est alors $< h$). A la limite, on a donc $f'(a) \leq 0$. De même $f'(b) \geq 0$. Avec l'hypothèse de non nullité faite,

$$f'(a) < 0 \text{ et } f'(b) > 0$$

Par ailleurs, par formule de Taylor-Young,

$$f(b+\delta) = f(b) + \delta f'(b) + o_0(\delta)$$

Ce qui précède (et en particulier $f'(b) \neq 0$) donne

$$\frac{1}{\sqrt{2(h - f(b+\delta))}} \underset{\delta \to 0^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{-\delta f'(b)}}$$

La fonction permettant de définir τ est ainsi intégrable au voisinage de b et $\tau(x)$ admet une limite finie quand $x \to b^-$:

$$\beta = \int_{x_0}^{b} \frac{du}{\sqrt{2(h - f(u))}}\, du$$

On procède de même au voisinage de a^+ pour prouver le caractère fini de

$$\alpha = \int_{x_0}^{a} \frac{du}{\sqrt{2(h - f(u))}}\, du$$

b. On a donc ($\psi = \tau^{-1}$)

$$\lim_{t \to \beta^-} \psi(t) = b \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \alpha^+} \psi(t) = a$$

Comme $\psi = \tau^{-1}$, on a $\psi' = \frac{1}{\tau' \circ \tau^{-1}} = \frac{1}{\tau' \circ \psi}$ c'est à dire

$$\forall t \in]\alpha, \beta[,\ \psi'(t) = \sqrt{2(h - f(\psi(t)))}$$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, la première partie de la question donne ($f(\psi(t))$ tend vers $0 = f(a) = f(b)$ quand t s'approche de α ou β

$$\lim_{t \to \beta^-} \psi'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \alpha^+} \psi'(t) = 0$$

Ψ se prolonge sur $[\alpha, \beta]$ en une fonction continue en posant

$$\Psi(\alpha) = (a, 0) \quad \text{et} \quad \Psi(\beta) = (b, 0)$$

Remarquons que, par un corollaire du théorème des accroissements finis, la fonction ψ prolongée en α par la valeur a et en β par la valeur b est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ avec $\psi'(\alpha) = \psi'(\beta) = 0$. De plus, comme $\psi''(t) = -f'(\psi(t))$ pour $t \in]\alpha, \beta[$, on aura aussi

$$\lim_{t \to \beta^-} \psi''(t) = -f'(b) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \alpha^+} \psi''(t) = -f'(a)$$

Le même corollaire du théorème des accroissements finis nous indique que la fonction ψ prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$ avec $\psi''(\alpha) = -f'(a)$ et $\psi''(\beta) = -f'(b)$. Ainsi, Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et vérifie (S) sur $[\alpha, \beta]$.

c. Posons maintenant

$$Z_1 : t \in]\beta, 2\beta - \alpha[,\ \mapsto Z(t - 2\beta) = (\psi(2\beta - t), -\psi'(2\beta - t))$$

Pour tout $t \in]\beta, 2\beta - \alpha[$, on a $t - 2\beta \in] - \beta, -\alpha[$ et donc

$$Z_1'(t) = Z'(t - 2\beta) = \Phi(Z(t - 2\beta)) = \Phi(Z_1(t))$$

Z_1 est donc solution de (S) sur $]\beta, 2\beta - \alpha[$. On a

$$\lim_{t \to \beta^+} Z_1(t) = (b, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to (2\beta - \alpha)^-} Z_1(t) = (a, 0)$$

$$\lim_{t\to\beta^+} Z_1'(t) = (0, -f'(b)) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to(2\beta-\alpha)^-} Z_1'(t) = (0, -f'(a))$$

On vérifie comme en b (c'est à dire avec le corollaire du théorème des accroissements finis) que Z_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\beta, 2\beta-\alpha]$ et est solution de (S) sur cet intervalle.
On définit bien une fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ (le raccord se fait bien bien) en posant

$$\forall t \in]\alpha, \beta], \ X(t) = \Psi(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in]\beta, 2\beta-\alpha[, \ X(t) = Z(t-2\beta)$$

On a alors

$$\lim_{t\to\alpha^+} X(t) = \lim_{t\to(2\beta-\alpha)^-} Z_1(t) = (a, 0)$$

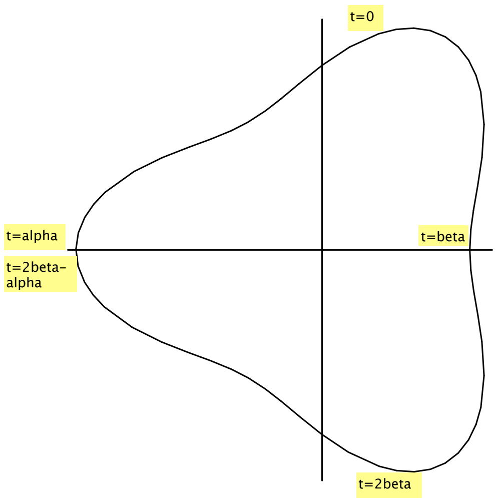
d. On prolonge X à $[\alpha, 2\beta-\alpha]$ en posant

$$X(\alpha) = X(2\beta-\alpha) = (a, 0)$$

On peut prolonger X par $2(\beta-\alpha)$-périodicité à $\mathbb{R}$ tout entier et la fonction obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car les dérivées à gauche en $2\beta-\alpha$ et à droite en α sont égales (à $(0, -f'(a))$). Cette fonction ainsi prolongée est bien solution sur $\mathbb{R}$: elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$ (simple vérification, par exemple avec la formule $X(t) = X(t-2(\beta-\alpha))$ pour $t \in [2\beta-\alpha, 4\beta-3\alpha]$). La période est

$$T = 2(\beta-\alpha) = 2\int_a^b \frac{du}{\sqrt{2(h-f(u))}}$$

La trajectoire obtenue est fermée et symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



On est en $(a, 0)$ pour $t \in \{\alpha, 2\beta-\alpha\}$, en X_0 pour $t = 0$, en $(b, 0)$ pour $t = \beta$ et en $(x_0, -y_0) = Z_0$ pour $t = 2\beta$.

E.2. On a toujours $f(a) = h$. D'après la formule de Taylor-Young,

$$h - f(a+\delta) = f(a) - f(a+\delta) = -\frac{\delta^2}{2} f''(a) + o_0(\delta^2)$$

Comme $f(x) < h$ sur un voisinage à droite de a, on ne peut avoir $f''(a) > 0$. Comme $f''(a) \neq 0$, on a donc $f''(a) < 0$. On en déduit aussi que

$$\frac{1}{\sqrt{2(h-f(a+\delta))}} \underset{\delta\to0^+}{\sim} \frac{1}{\delta\sqrt{-f''(a)}}$$

La fonction permettant de définir τ est ainsi non intégrable au voisinage de a. Comme elle est positive, $\tau(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \to a^+$ et $\alpha = -\infty$.
De façon similaire, si $b < +\infty$, $f'(b) = 0$ et $f''(b) \neq 0$ alors $f''(b) < 0$ et $\beta = +\infty$.

E.3. Si $a = -\infty$ alors $\psi = \tau^{-1}$ est de limite infinie en α. La trajectoire n'est pas bornée. Si $b = +\infty$, on a le même résultat.

E.4. - Dans le cas de Γ_h, on suppose $h > 0$ (pas de solution pour $h < 0$ et origine seule dans le cas $h = 0$, on ne rentre pas dans le cadre de cette deuxième partie). On a alors $a = -\frac{\sqrt{2h}}{\omega}$ et $b = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}$ et on est dans le cas $E.1$.

- Pour γ_h, on cherche les x tels que $-\frac{\omega^2}{2}x^2 < h$ et on distingue trois cas.
  - si $h > 0$ alors l'inégalité est toujours vérifiée. On a $a = -\infty$ et $b = +\infty$ et on est dans le cas $E.3$ pour a et b.
  - si $h = 0$, l'intervalle $I(x_0)$ sera égal à $\mathbb{R}^{*-}$ ou $\mathbb{R}^{*+}$ selon le signe de x_0. Si $x_0 > 0$ alors $a = 0$ ($E.2$) et $b = +\infty$ ($E.3$). Si $x_0 < 0$ alors $a = -\infty$ ($E.3$) et $b = 0$ ($E.2$). Le cas $x_0 = 0$ entraînerait $y_0 = 0$ (car $h = 0$) et est exclus.
  - Si $h < 0$ alors $I(x_0)$ vaut l'un des intervalles $]\frac{\sqrt{2|h|}}{\omega}, +\infty[$ ou $]-\infty, \frac{\sqrt{2|h|}}{\omega}[$ selon le signe de x_0 ($h < 0$ interdit certaines valeurs de x_0). Dans le premier cas, on aura $a = \frac{\sqrt{2|h|}}{\omega}$ (cas $E.1$ car $f'(a) \neq 0$) et $b = +\infty$ (cas $E.3$) Dans le second, $a = -\infty$ (cas $E.3$) et $b = -\frac{\sqrt{2|h|}}{\omega}$ (cas $E.1$).

3 Linéarisation autour d'un équilibre.

A. Dans le cas où $f'(e) = 0$, on vérifie que $X : t \mapsto (e, 0)$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $X(0) = (e, 0) = E$.

B. On distingue trois cas.

- Si $f''(e) > 0$, on pose $f''(e) = \gamma^2$ avec $\gamma > 0$. Si (u, v) est solution de (L) alors $u'' = v' = -\gamma^2 u$. Il existe donc des constantes α et β telles que $\forall u,\ u(t) = \alpha\cos(\gamma t) + \beta\sin(\gamma t)$ et $v = u'$. Réciproquement,

$$t \mapsto \alpha(\cos(\gamma t), -\gamma\sin(\gamma t)) + \beta(\sin(\gamma(t)), \gamma\cos(\gamma t))$$

est effectivement solution de (L). L'ensemble des solutions de (L) est donc

$$Vect\,(t \mapsto (\cos(\gamma t), -\gamma\sin(\gamma t)), t \mapsto (\sin(\gamma(t)), \gamma\cos(\gamma t)))$$

- Si $f''(e) = 0$, on trouve de même que l'ensemble des solutions est

$$Vect(t \mapsto (t, 1), t \mapsto (1, 0))$$

- Si $f''(e) > 0$, on pose $f''(e) = -\gamma^2$ avec $\gamma > 0$. Comme dans le premier cas, l'ensemble des solutions de (L) est donc

$$Vect\,(t \mapsto (\mathrm{ch}(\gamma t), -\gamma\mathrm{sh}(\gamma t)), t \mapsto (\mathrm{sh}(\gamma(t)), \gamma\mathrm{ch}(\gamma t)))$$

C. D'après la question précédente, un point d'équilibre $(e, 0)$ est stable si $f''(e) > 0$ (sinon, on peut trouver des solution non bornées).

D.1. On a $f(e) = f'(e) = 0$. Comme $f''(e) > 0$ et comme f'' est continue, il existe un intervalle $[c, d]$ sur lequel f'' est strictement positive et $e \in]c, d[$ (il suffit d'utiliser la définition de la continuité de f'' en e avec $\varepsilon = \frac{f''(e)}{2} > 0$ par exemple). f' est alors strictement croissante sur $[c, d]$ et donc strictement négative sur $[c, e[$ et strictement positive sur $]e, f]$.

- f est continue et strictement décroissante sur $[c, e]$ et réalise une bijection de $[c, e]$ dans $[0, f(c)]$. Comme $f'(e) = 0$, la bijection réciproque n'est pas dérivable en 0. Cependant e est le seul point d'annulation de f' et f réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[c, e[$ dans $]0, f(c)]$.
- De même f réalise une bijection de $[e, d]$ dans $[0, f(d)]$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]e, d]$ dans $]0, f(d)]$.

D.2. Si on pose $H = \min(f(c), f(d))$, ce qui précède montre que dans $[c,d]$, l'équation $f(x) = h$ admet, pour $h \in]0,H]$, exactement deux solutions $x^-(h) < e < x^+(h)$. On a $f(x^-(h)) = h \to 0 = f(e)$ quand $h \to 0$. Composant par la bijection réciproque de la restriction à $[c,e]$ de f (fonction continue), on obtient $x^-(h) \to e$ quand $h \to 0$ et de même $x^+(h) \to e$.

D.3. On a $F(x,y) - F(e,0) = \frac{y^2}{2} + f(x)$. Pour $x \in [c,d]$ et $y \in \mathbb{R}$, cette quantité est positive et n'est nulle que si $y = 0$ et $f(x) = 0$ c'est à dire $y = 0$ et $x = e$. f présente donc en $(e,0)$ un minimum local strict.

Il existe donc R tel que si $X \in B(E,R)$ et $X \neq 0$, $F(X) > 0$. Comme $F(x,y) = \frac{y^2}{2} + f(x)$ tend vers 0 quand $(x,y) \to (e,0)$, on peut choisir R de façon à ce que

$$\forall X \in B(E,R) \setminus \{E\},\ 0 < F(x) \leq H$$

Soit $X_0 \in B(E,R)$;

- si $X_0 = E$ alors la solution est, on l'a vu, constante et donc périodique ;
- sinon, l'énergie h de la trajectoire vérifie $h \in]0,H]$; avec les notations de la partie 2, on a alors $a = x^-(h)$ et $b = x^+(h)$ qui sont finis. La solution est périodique de période

$$T(h) = 2\int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \frac{du}{\sqrt{2(h - f(u))}}\, du$$

E.1. On a (Taylor-Young) $f(u) = \frac{(u-e)^2}{2} f''(e) + (u-e)^2 \varepsilon(u-e)$ où ε est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{e\}$ et de limite nulle en 0. Comme $x_n^+ \to e$,

$$h = f(x_n^+) = \frac{(x_n^+ - e)^2}{2} f''(e) + (x_n^+ - e)^2 \varepsilon(x_n^+ - e)$$

E.2. Le changement de variable $v = \frac{u-e}{x_n^+ - e}$ donne

$$\int_e^{x_n^+} \frac{du}{\sqrt{2(h_n - f(u))}} = (x_n^+ - e)\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{2(h_n - f(e + v(x_n - e)))}}$$

Or, la question précédente donne

$$h_n - f(e + v(x_n^+ - e)) = (x_n^+ - e)^2 \left(\frac{1}{2} f''(e) - \frac{v^2}{2} f''(e) + \varepsilon(x_n^+ - e) + \varepsilon(v(x_n^+ - e))\right)$$

ce qui donne, en posant $\varepsilon_n^+(v) = 2\varepsilon(x_n^+ - e) + 2\varepsilon(v(x_n^+ - e))$,

$$\frac{(x_n^+ - e)}{\sqrt{2(h_n - f(e + v(x_n - e)))}} = \frac{1}{\sqrt{f''(e)(1 - v^2) + \varepsilon_n^+(v)}}$$

Ainsi

$$\int_e^{x_n^+} \frac{du}{\sqrt{2(h_n - f(u))}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{f''(e)(1 - v^2) + \varepsilon_n^+(v)}}$$

Le même travail donne

$$\int_{x_n^-}^{e} \frac{du}{\sqrt{2(h_n - f(u))}} = \int_{-1}^0 \frac{dv}{\sqrt{f''(e)(1 - v^2) + \varepsilon_n^-(v)}}$$

E.3. $g_n : v \mapsto \frac{1}{\sqrt{f''(e)(1-v^2) + \varepsilon_n^+(v)}}$ est le terme général d'une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $v \mapsto \frac{1}{\sqrt{f''(e)(1-v^2)}}$ sur $[0,1[$. Cette limite simple est continue sur $[0,1[$.

En **SUPPOSANT** que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou tout autre théorème d'interversion), on a

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = 2\int_{-1}^{1} \frac{dv}{f''(e)(1-v^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{f''(e)}}$$

Par caractérisation séquentielle, on a alors

$$\lim_{h\to 0} T(h) = \frac{2\pi}{\sqrt{f''(e)}}$$

et l'on retrouve la période de la solution du problème linéarisé.