CENTRALE 2000
PSI 2

I. A- 1) Un segment [AB] est l'ensemble des combinaisons convexes de A et de B. Mais toute combinaison convexe de combinaisons convexes de A et de B est encore une combinaison convexe de A et de B. Donc le segment [AB] est convexe.

I. A- 2) Soient M_1, M_2, . . . , M_p p points du demi-plan fermé F et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. Alors $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OM_i} \,/\, \overrightarrow{U}\right) \le \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a = a$. Donc F est convexe. Le raisonnement est le même pour un demi-plan ouvert en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte.

I. A- 3) Soient M_1, M_2, . . . , M_p p points de C et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. Alors pour tout α dans A, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ est un point de C_α, d'où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C$. Donc C est convexe.

I. B- Une combinaison convexe d'un point unique M_1 ne peut être que ce point lui-même. L'hypothèse de récurrence est donc triviale pour $p = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang p - 1 ; soient M_1, M_2, . . . , M_p p points de C et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. L'associativité du barycentre donne l'égalité $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \cdot \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} M_i + \lambda_n M_n$. Par hypothèse de récurrence, $N = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} M_i$ est dans C et comme le segment [NM_n] est dans C, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ est encore dans C. D'où le résultat.

I. C- 1) Le point $N = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} M_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} M_3$ est un point de la droite M_2M_3 et M est barycentre de M_1 et M pondérés par λ_1 et $\lambda_2 + \lambda_3$. Pour que M soit dans F_1 il faut et il suffit que M soit dans le segment [M_1N], c'est à dire $\lambda_1 \ge 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 \ge 0$ ou dans la demi-droite issue de M_1 ne contenant pas N, c'est à dire $\lambda_1 \ge 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 \le 0$. Globalement, $M \in F_1 \Leftrightarrow \lambda_1 \ge 0$.

D'où $M \in Conv(M_1, M_2, M_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \ge 0 \\ \lambda_2 \ge 0 \\ \lambda_3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$.

I. C- 2) Un point du triangle $Conv(M_1, M_2, M_3)$ distinct de M_1 est tel que l'un au moins des coefficients λ_2 ou λ_3 est non nul. Une combinaison convexe de tels points vérifie encore cette propriété puisque tous ses coefficients sont positifs.

I. D- Une application affine f conserve le barycentre, donc les combinaisons convexes ; si de plus c'est une bijection, l'image d'une partie finie {M_1, M_2, . . . , M_p} est une partie finie {$f(M_1)$,$f(M_2)$, . . . ,$f(M_p)$} de même cardinal. Donc l'image d'un polytope est un polytope.

I. E- 1) T est borné puisque contenu dans l'hypercube fermé $[0,1]^p$. De plus, T est l'intersection de cet hypercube fermé avec l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ qui est lui aussi un fermé. Donc T est fermé et borné : c'est un compact.

I. E- 2) f est continue car chaque fonction coordonnée est une fonction polynomiale des variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

I. E- 3) Le polytope $Conv(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ est l'image du compact T par l'application continue f. C'est donc un compact.

I. E- 4) L'intersection d'une droite Δ et d'un polygone convexe P de $\mathbb{R}^2$ est donc un fermé (intersection de deux fermés) borné (contenu dans P), donc compact.

Par ailleurs, c'est un convexe (cf. : **A- 3**). Or un convexe compact S sur une droite est un segment. En effet, si on note a et b la borne supérieure et la borne inférieure des abscisses (comptées sur la droite) des points de S (elles existent puisque S est borné), les points A et B correspondants sont dans S (car S est fermé) d'où $S \subset [AB]$ (car S est convexe) et finalement S = [AB] (avec éventuellement $A = B$).

I. F- 1) Si P n'est pas réduit à M_1, $P \setminus \{M_1\}$ est contenu dans le demi-plan ouvert $\overset{\circ}{F}$ et $P \setminus \{M_1\} = P \cap \overset{\circ}{F}$ qui est convexe d'après **A- 3**. Donc M_1 est extrémal.

I. F- 2) Soit $P = Conv(M_1, M_2, \dots, M_p)$ et $M \in P$ distinct de chacun des points M_i . Alors $P \setminus M$ contient M_1, $M_2, \dots, M_p$, donc n'est pas stable par combinaison convexe. Donc seuls les points $M_1, M_2, \dots, M_p$ peuvent être extrémaux.

I. F- 3) Pour $n = 2$, la courbe est une parabole.

Soit $M = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j M(t_j)$ un point de P. Alors, pour tout i,

$$t_i^2 - (\overrightarrow{OM} / \overrightarrow{U_i}) = \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j\right) t_i^2 - 2t_i \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j t_j\right) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j t_j^2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (t_j - t_i)^2 \geq 0$$

et cette quantité ne peut s'annuler que si tous les termes sont nuls, d'où $\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq i$, c'est à dire $M = M_i$.

Donc M_i est pour tout i un point extrémal ; d'après **2**, ce sont les seuls.

II. A- 1) Supposons que f est $\mathbb{R}$ -linéaire représentée dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$f(z) = (ax + by) + i(cx + dy) = a\frac{z + \bar{z}}{2} + b\frac{z - \bar{z}}{2} + i\left(c\frac{z + \bar{z}}{2} + d\frac{z - \bar{z}}{2}\right) = \frac{a + d + i(c - b)}{2} z + \cdots$$

Inversement, si $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$, f est $\mathbb{R}$ -linéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha + \beta) & \operatorname{Im}(\beta - \alpha) \\ \operatorname{Im}(\alpha + \beta) & \operatorname{Re}(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$.

II. A- 2) $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \dfrac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} - \dfrac{(a-d)^2 + (c+b)^2}{4} = ad - bc = \det f$. Donc f est un automorphisme ssi $|\alpha| \neq |\beta|$.

II. A- 3) La matrice de la réflexion vectorielle considérée est $\begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = e^{2i\vartheta}$.

II. B- 1) H est défini comme le noyau de la forme linéaire (manifestement non nulle) $(z_1, \dots z_p) \mapsto z_1 + \dots + z_p$. C'est donc un hyperplan vectoriel.

II. B- 2) $\psi^p = id$. Donc ψ annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$, ce qui prouve que ψ est diagonalisable (le corps de base étant $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé).

$\psi(\Omega_k) = \omega^k \Omega_k$. Donc Ω_k est un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre ω^k . Comme les ω^k , $k \in [\![0, p-1]\!]$ sont distincts, les Ω_k constituent une base propre pour ψ .

II. B- 3) Pour $k \neq 0$, Ω_k est dans H. Donc $\{\Omega_1, \dots, \Omega_{p-1}\}$ est une base de H.

II. C- 1) Puisque V est dans H, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1})$ unique tel que $V = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \Omega_k$.

II. C- 2) Calculons les produits scalaires (hilbertiens complexes) de chaque vecteur Ω_k par le vecteur $W = (1, \omega, \dots, \omega^{p-1})$: il s'écrivent $\begin{cases} (W / \Omega_1) = \sum_{k=1}^{p} \omega^{1-k} \omega^{k-1} = p \\ (W / \Omega_r) = \sum_{k=1}^{p} \omega^{1-k} \omega^{r(k-1)} = \sum_{k=1}^{p} \omega^{(r-1)(k-1)} = 0 \quad \text{car } \Omega_{r-1} \in H \text{ si } r > 1 \end{cases}$. On en déduit que $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}(W / V) = \dfrac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} \omega^{1-r} a_r$.

En calculant de même les produits scalaires avec le vecteur $W' = \left(1, \dfrac{1}{\omega}, \dots, \dfrac{1}{\omega^{p-1}}\right)$, on trouve $\lambda_{p-1} = \dfrac{1}{p}(W' V/) = \dfrac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} \omega^{r-1} a_r$.

II. C- 3) $\sum_{r=1}^{p}\alpha_r = \operatorname{Im}\sum_{r=1}^{p} e^{i(r-1)\frac{2\pi}{p}-i\frac{\vartheta}{2}} = \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\vartheta}{2}}\right)\sum_{r=1}^{p}\omega^{r-1} = 0$.

Ecrivons $\alpha_r = \frac{1}{2i}\left(e^{-i\frac{\vartheta}{2}}\omega^{r-1} - e^{i\frac{\vartheta}{2}}\omega^{1-r}\right)$. Alors

$$\sum_{r=1}^{p} a_r\alpha_r = \left(\frac{1}{2i}e^{i\frac{\vartheta}{2}}W'.V\right) - \left(\frac{1}{2i}e^{-i\frac{\vartheta}{2}}W/V\right) = \frac{p}{2i}\left(\lambda_p e^{-i\frac{\vartheta}{2}} - \lambda_1 e^{i\frac{\vartheta}{2}}\right) = 0 .$$

III. A- 1) Pour toute droite d_1 de $\mathbb{R}^2$, il existe une rotation qui envoie $\delta(0)$ sur d_1.

Pour tout couple (d_1, d_2), on peut définir une application linéaire qui envoie les vecteurs de la base canonique sur des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 respectivement, c'est à dire $\delta(0)$ et $\delta(\frac{\pi}{2})$ sur d_1 et d_2.

III. A- 2) Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites deux à deux distinctes engendrées par U_1, U_2 et U_3 respectivement. On peut écrire $U_2 = \alpha U_1 + \beta U_3$. Notons ($e_1$, e_2) la base canonique et définissons l'application linéaire f par $\begin{cases} f(e_1) = \alpha U_1 \\ f\left(\frac{-e_1+\sqrt{3}e_2}{2}\right) = \beta U_3 \end{cases}$. Alors $f\left(\frac{e_1+\sqrt{3}e_2}{2}\right) = U_2$ et l'application f envoie bien $\delta(0)$, $\delta(\frac{\pi}{3})$ et $\delta(\frac{2\pi}{3})$ sur d_1, d_2 et d_3 respectivement.

III. B- 1) Chaque vecteur U_j est défini au produit près par un scalaire non nul. De par la multilinéarité de det, cette multiplication ne modifie pas $\mathcal{R}$.

III. B- 2) $\mathcal{R}(\ f(\mathcal{F})\ ) = \frac{\det\left(f(U_1)\ f(U_3)\right)\det\left(f(U_2)\ f(U_4)\right)}{\det\left(f(U_1)\ f(U_4)\right)\det\left(f(U_2)\ f(U_3)\right)}$. Or $\det\left(f(U)\ f(V)\right) = \det f\ \det(U\ V)$; on peut donc simplifier par $(\det f)^2$ (on rappelle que det f n'est pas nul) d'où $\mathcal{R}(\ f(\mathcal{F})\ ) = \mathcal{R}(\ \mathcal{F})$.

III. C- 1) $\cos k\vartheta = \operatorname{Re} e^{ik\vartheta} = \operatorname{Re}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^k = \sum_{0\le k\le p/2}\binom{k}{2p}\cos^{k-2p}\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^p$ qui est bien un polynôme en $\cos\vartheta$ à coefficients entiers.

III. C- 2)

$$\mathcal{R}(\ \mathcal{D}\ ) = \mathcal{R}(\ f^{-1}(\mathcal{D})\ ) = \frac{\begin{vmatrix}\cos\vartheta_1 & \cos\vartheta_3\\ \sin\vartheta_1 & \sin\vartheta_3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\cos\vartheta_2 & \cos\vartheta_4\\ \sin\vartheta_2 & \sin\vartheta_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\vartheta_1 & \cos\vartheta_4\\ \sin\vartheta_1 & \sin\vartheta_4\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\cos\vartheta_2 & \cos\vartheta_3\\ \sin\vartheta_2 & \sin\vartheta_3\end{vmatrix}} = \frac{\sin(\vartheta_3-\vartheta_1)\sin(\vartheta_4-\vartheta_2)}{\sin(\vartheta_4-\vartheta_1)\sin(\vartheta_3-\vartheta_2)} = \frac{\cos(\vartheta_3-\vartheta_1-\vartheta_4+\vartheta_2)}{\cos(\vartheta_4-\vartheta_1-\vartheta_3+\vartheta_2)}$$

où les ϑ_j sont les angles polaires de quatre des droites de $f^1(\mathcal{F})$, c'est à dire de la forme $k_j\frac{\pi}{p}$. D'où

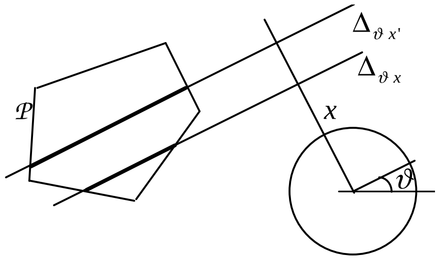
$$\mathcal{R}(\ \mathcal{D}\ ) = \frac{\cos\left((k_3-k_1-k_4+k_2)\pi/p\right)}{\cos\left((k_4-k_1-k_3+k_2)\pi/p\right)} = \frac{T_{k'}\left(\cos\pi/p\right)}{T_{k''}\left(\cos\pi/p\right)} = G\left(\cos\pi/p\right).$$

Notons φ_j l'angle polaire de d_j et supposons que $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/4$ et $\varphi_3 = \pi/2$. Alors

$\mathcal{R}(\ \mathcal{D}\ ) = \frac{\cos\left(\pi/2 - \vartheta_4 - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\vartheta_4 - \pi/2 + \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\vartheta_4 - \frac{\pi}{4}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{E}$. On peut trouver ϑ_4 tel que $\tan\left(\vartheta_4 - \frac{\pi}{4}\right) = x$.

Alors aucune famille de p droite contenant les droites d_j ($1 \le j \le 4$) ne peut être π-rationnelle.

IV. A- En notant ζ l'angle polaire du point courant, $\Delta_{\vartheta x}$ a pour équation polaire $\rho = \dfrac{x}{\cos\left(\zeta - \vartheta - \pi/2\right)} = \dfrac{x}{\sin(\zeta - \vartheta)}$.



IV. B- 1) Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont $\delta(\vartheta)$-identifiables, alors, pour tout x réel, $l(\Delta_{\vartheta x} \cap \mathcal{P}) = l(\Delta_{\vartheta x} \cap \mathcal{P}')$. Si deux segments d'une <u>même droite</u> sont de même longueur, leurs images par une bijection affine sont de même longueur, d'où $l(f(\Delta_{\vartheta x}) \cap f(\mathcal{P})) = l(f(\Delta_{\vartheta x}) \cap f(\mathcal{P}'))$.
$f(\Delta_{\vartheta x})$ est une droite qui reste dirigée par $\varphi(\delta(\vartheta))$ et, quand x décrit $\mathbb{R}$, le point $xie^{i\vartheta}$ décrit la droite $\delta\left(\vartheta + \pi/2\right)$ et son image décrit donc $\varphi\left(\delta\left(\vartheta + \pi/2\right)\right)$.Comme φ est une bijection, cette droite n'est pas identique à $\varphi(\delta(\vartheta))$ et par conséquent, $f(\Delta_{\vartheta x})$ balaie tout le plan. Donc $f()$ et $f(\mathcal{P}')$ sont $\varphi(\delta(\vartheta))$-identifiables.

IV. B- 2) La réflexion affine σ_q envoie un point d'argument ζ sur le point d'argument $\zeta' = (2q-1)\dfrac{\pi}{p} - \zeta$. Il est alors clair que si ζ est un multiple pair de $\dfrac{\pi}{p}$, ζ' est un multiple impair et inversement. Les deux ensembles $\{A_1, \dots, A_p\}$ et $\{B_1, \dots, B_p\}$ sont donc globalement échangés, donc aussi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ puisqu'une application affine conserve une combinaison convexe.

IV. B- 3) Par suite, les p droites vectorielles orthogonales aux droites Δ_q, $q = 1, \dots, p$ constituent une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient $\mathcal{F}$-identifiables.

IV. B- 4) Si $\mathcal{G}$ est une famille π-rationnelle, $\mathcal{G}$ est l'image par une application affine des droites $\delta\left(q\dfrac{\pi}{m}\right)$, $q = 0, \dots, m-1$, droites que l'on peut faire tourner d'un angle $\dfrac{\pi}{2m} + \dfrac{\pi}{2}$ pour se retrouver dans la situation des droites Δ_q' orthogonales aux droites Δ_q de la question **3)**. Si f' est la bijection affine telle que $f'\left(\{\Delta_1', \dots, \Delta_m'\}\right) = \mathcal{G}$, alors $\mathcal{Q} = f'(\mathcal{P})$ et $\mathcal{Q}' = f'(\mathcal{P}')$ sont $\mathcal{G}$-identifiables et distincts.

IV. C- Par construction, d'après **III. C- 3)**, $\mathcal{D}$ n'est pas extraite d'une famille π-rationnelle. Il ne peut donc exister deux polygones convexes distincts $\mathcal{D}$-identifiables. Donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.