Concours Communs INP 2020

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Corrigé

PROBLÈME 1
Autour de la fonction sinus cardinal

Partie I – Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Q1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction sinus est continue sur $[0, t]$, de classe C^1 sur $]0, t[$, et sa dérivée (le cosinus) est majorée en valeur absolue par 1. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \cdot |t - 0|,$$

c'est-à-dire : $|\sin(t)| \leqslant t$. D'où le résultat.

Q2. Il s'agit de démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, les intégrales $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$ convergent.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Leurs intégrandes sont continus sur $]0, +\infty[$ (et même sur $[0, +\infty[$ pour $G(x)$ et $H(x)$), et dominées par la fonction $t \mapsto e^{-tx}$; pour justifier cette domination, il suffit d'utiliser l'inégalité $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$ valable pour tout $t > 0$ d'après la question précédente, ou les inégalités triviales $|\sin| \leqslant 1$ et $|\cos| \leqslant 1$ pour les deux dernières intégrales.

Or c'est un résultat connu que la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si $x > 0$. Donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, les intégrales $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$ convergent absolument, donc convergent.

Ainsi F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Toujours en utilisant l'inégalité $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$ valable pour tout $t > 0$, et l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant |F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| e^{-tx}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x},$$

et de là il vient facilement $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ grâce au théorème des gendarmes.

Q4. Nous allons utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Posons :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

Alors :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **Q2** ;
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, +\infty[$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t) \ ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;

— pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\sin(t)|e^{-xt} \leqslant e^{-at} \quad \text{(hypothèse de domination)},$$

et l'application $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $a > 0$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a en outre :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = -G(x).$$

Q5. Soit $x > 0$. On a :

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos(t) + i\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i},$$

et nous mettons cette expression sous forme algébrique afin d'en déduire, par identification des parties réelle et imaginaire, une expression simple de $G(x)$ et $H(x)$. On a, après multiplication au numérateur et au dénominateur par $x + i$:

$$H(x) + iG(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + i\frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit, par la stratégie annoncée ci-dessus :

$$H(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad G(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Pour en déduire, pour $\alpha \in]0,+\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$, notons qu'en posant $u = \alpha t$ nous devrions pouvoir nous ramener à la fonction H (et en même temps démontrer la convergence de cette intégrale). Le changement de variable $t \mapsto \alpha t$ est licite car c'est une application de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On a par ailleurs $\mathrm{d}u = \alpha\mathrm{d}t$, et sous réserve d'existence de cette intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\alpha}u}\cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{\alpha} = \frac{H\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha}.$$

Or un changement de variable conserve la nature des intégrales, et on sait que $H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ converge. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$ converge, et l'égalité ci-dessus est licite. On a donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{x}{\alpha}}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{x}{x^2+\alpha^2}.$$

Q6. On a :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) \overset{[\mathbf{Q4}]}{=} -G(x) \overset{[\mathbf{Q5}]}{=} -\frac{1}{x^2+1}.$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est l'arc tangente. On en déduit l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = -\arctan(x) + c.$$

Or, d'après la question **Q3** : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus donne donc :

$$0 = -\frac{\pi}{2} + c,$$

c'est-à-dire : $c = \frac{\pi}{2}$. En conclusion :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Et en outre $F(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, ce qu'on peut réécrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Partie II – Autour de la formule de Viète

Q7. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposition P_n :

$$\text{« Pour tout } t > 0 \text{ tel que } t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi, \text{ on a : } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}. \text{ »}$$

Montrons P_1. Soit $t > 0$ tel que $t \not\equiv 0 \bmod \pi$. On a :

$$\frac{\sin(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right),$$

d'où la propriété au rang 1.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Soit $t > 0$ tel que $t \not\equiv 0 \bmod 2^n\pi$. Alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right).$$

A priori P_n nécessite que $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$. Mais l'identité invoquée se prolonge au cas $t \equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$ (tant que $t \not\equiv 0 \bmod 2^n\pi$) par passage à la limite et par continuité (qui est assurée par le fait que $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$ en ces réels t).
La formule de duplication $\sin(a) = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ utilisée avec $a = \frac{t}{2^n}$ implique alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$$

d'où P_{n+1} : ainsi la proposition est héréditaire.
Ayant démontré que la proposition est initialisée et héréditaire, on en déduit qu'on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus (2^{n-1}\pi\mathbb{Z}), \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'énoncé a oublié de tenir compte de l'annulation possible de $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$ au dénominateur ; si je choisis de prendre $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$ dans la définition de P_n, au lieu de $t \not\equiv 0 \bmod 2^n\pi$ (qui suffirait à permettre la division par $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$), c'est pour m'éviter une distinction de cas fastidieuse dans l'hérédité, sachant que cela n'empêche pas de traiter les questions suivantes, la question **Q9** plus particulièrement.

Q8. Soit $t > 0$. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposition P_n :

$$\text{« } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right). \text{ »}$$

Montrons P_1. On a :

$$\frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{2^{1-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1} t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right),$$

d'où la propriété au rang 1.

À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. On a :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$$

et d'après la formule de trigonométrie rappelée :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

utilisée avec $a = \frac{2k-1}{2^n} t$ et $b = \frac{t}{2^{n+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2(2k-1)+1}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2(2k-1)-1}{2^{n+1}} t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv -1 \bmod 4}}^{4\cdot 2^{n-1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv -3 \bmod 4}}^{4\cdot 2^{n-1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv \pm 1 \bmod 4}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right),
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on écrit que $-3 \equiv 1 \bmod 4$. Or l'ensemble des entiers congrus à ± 1 modulo 4 est exactement l'ensemble des entiers impairs. C'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv \pm 1 \bmod 4}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right),$$

et un entier impair $\ell \in [\![1, 2^{n+1}]\!]$ s'écrit $\ell = 2k-1$ avec $k \in \mathbb{N}$ (plus précisément : $1 \leqslant \ell \leqslant 2^{n+1} \iff 1 \leqslant k \leqslant \frac{2^{n+1}+1}{2}$ donc $k \in [\![1, 2^n]\!]$). En conclusion :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right),$$

d'où P_{n+1} : ainsi la proposition est héréditaire.

Ayant démontré que la proposition est initialisée et héréditaire, on en déduit qu'on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q9. Soit $t > 0$, et soit n au voisinage de l'infini. En particulier, pour tout n suffisamment grand, on a $t \in]0, 2^{n-1}\pi[$ et donc $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$. En regroupant les résultats des deux questions précédentes, il vient :

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

Or le membre de gauche a une limite finie quand $n \to +\infty$. En effet, en utilisant l'équivalent asymptotique classique $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$, avec $u = \frac{t}{2^n}$, on obtient :

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{2^n \times \frac{t}{2^n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{t} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(t)}{t}.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$ existe, et qu'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Q10. Soit $x > 0$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ \forall t \in]0, +\infty[, \ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}.$$

Avec ces notations, on aimerait démontrer :

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t,$$

puisqu'en effet, par linéarité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} \mathrm{d}t.$$

Or, d'après la question **Q9**, on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \mathrm{d}t.$$

Autrement dit, l'égalité à démontrer revient à faire une interversion limite-intégrale : nous allons pour cela utiliser le théorème de convergence dominée. Vérifions ses hypothèses :

— pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application f_n est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$, en tant que combinaison linéaire de produits de cosinus et exponentielles ;

— d'après la question **Q9**, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers l'application $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-tx}$, qui est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit et quotient de fonctions usuellement continues ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left|\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\right|e^{-tx} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} e^{-tx} = e^{-tx} \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et on sait que l'application $\varphi : t \mapsto e^{-tx}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on en déduit d'une part que f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et d'autre part que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, d'après la discussion qui précède :

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-tx}\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

Q11. Nous avons établi dans la question **Q6** que $F(1) = \frac{\pi}{4}$. Donc, d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-t}\mathrm{d}t,$$

Or on sait calculer les intégrales du membre de droite grâce à la question **Q5**, et on en déduit (en prenant $\alpha = \frac{2k-1}{2^n}$ et $x = 1$) :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2+1} = \lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q12. Posons : $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{\frac{k^2}{2^{2n-2}}+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right).$$

C'est la somme de Riemann de f de pas 2^{n-1}, associée à la subdivision :

$$0 = \frac{0}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{2}{2^{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{k}{2^{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1.$$

En vérité il y a un terme en trop dans la somme ci-dessus, mais il n'affecte pas du tout la limite des sommes de Riemann. Comme f est continue sur $[0,1]$, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4}.$$

Q13. Soit $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right| &= \left|\frac{((2k-1)^2+2^{2n}) - (4k^2+2^{2n})}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})}\right| \\ &= \frac{|-4k+1|}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})} \\ &\leqslant \frac{4k+1}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})}.\end{aligned}$$

Pour obtenir la majoration voulue, on écrit que $k \leqslant 2^{n-1}$, et si $k \geqslant 1$ on utilise la minoration $2k-1 \geqslant 1$ qui implique $(2k-1)^2 \geqslant 1$ (pour $k=0$ cette dernière inégalité est immédiate) pour en déduire :

$$\left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right| \leqslant \frac{4\cdot 2^{n-1}+1}{(4k^2+2^{2n})(1+2^{2n})},$$

d'où le résultat.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\left|2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)\right| &\leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right| \\ &\leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{4\cdot 2^{n-1}+1}{(4k^2+2^{2n})(1+2^{2n})} \\ &= \frac{(4\cdot 2^{n-1}+1)}{1+2^{2n}}\cdot 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}.\end{aligned}$$

Pour en déduire la limite demandée, nous devons démontrer que le majorant que nous venons de donner admet une limite nulle quand $n \to +\infty$: inspectons la limite de chacun des termes. Nous avons démontré dans la question **Q12** que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$. De plus :

$$\frac{(4\cdot 2^{n-1}+1)}{1+2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(4\cdot 2^{n-1}+1)}{1+2^{2n}}\cdot 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} = 0.$$

On en déduit, avec le théorème des gendarmes, que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right) = 0.$$

Pour retrouver le résultat de la question **Q11**, il suffit d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)$$

et quand on prend la limite quand $n \to +\infty$, tout ce qui précède montre qu'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4},$$

d'où le résultat.

PROBLÈME 2
Les matrices de Kac

Partie I – La dimension 3

Q15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \end{matrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda+2)\lambda,
\end{aligned}$$

donc : $\chi_A = (X-2)(X+2)X$.

Q16. Le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples, donc A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2, -2\}.$$

On en déduit par ailleurs que ses sous-espaces propres sont de dimensions inférieures ou égales aux ordres de multiplicités des valeurs propres : ils sont donc de dimension 1.

Q17. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} (C_1 \leftarrow C_1 + C_3) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+4),
\end{aligned}$$

donc : $\chi_B = X(X^2+4) = X(X+2i)(X-2i)$. On a alors :

$$i\chi_B(iX) = i(iX)(iX+2i)(iX-2i) = i^4 X(X+2)(X-2) = X(X+2)(X-2) = \chi_A(X),$$

comme désiré.

Q18. Comme χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par contre χ_B est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Les valeurs propres de B sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}, \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, 2i, -2i\}.$$

On en déduit par ailleurs que ses sous-espaces propres sont de dimensions inférieures ou égales aux ordres de multiplicités des valeurs propres : ils sont donc de dimension 1.

Q19. On pourrait déterminer $D^{-1}AD$ à l'aide de la formule du changement de base, entre la base canonique (E_1, E_2, E_3) et la base $(E_1, iE_2, -E_3)$ de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ (il s'agirait alors de décrire l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A dans cette nouvelle base), mais autant faire un calcul direct (parce que les produits matriciels avec les matrices diagonales D et D^{-1} sont extrêmement simples : sinon, hors de question de procéder ainsi). Notons que $i^{-1} = -i$, comme c'est facile de le vérifier. Alors :

$$\begin{aligned} D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc : $D^{-1}AD = -iB$.

Q20. Même commentaire et même stratégie que ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}A\Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice obtenue est symétrique et à coefficients réels, donc est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme A est semblable à une matrice diagonalisable, elle est elle-même diagonalisable.

Partie II – Étude d'un endomorphisme

Q21. Considérons donc des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + \alpha_n(\cos(x))^n = 0.$$

En posant $x = 0$, cette égalité implique $\alpha_n = 0$. L'égalité devient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + \alpha_{n-1}(\cos(x))^{n-1}\sin(x) = 0.$$

Pour tout $x \not\equiv 0 \bmod \pi$, on a $\sin(x) \neq 0$ et on peut donc diviser cette égalité par x pour obtenir :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \alpha_0(\sin(x))^{n-1} + \alpha_1(\sin(x))^{n-2}\cos(x) + \cdots + \alpha_{n-1}(\cos(x))^{n-1} = 0.$$

On ne peut plus prendre $x = 0$ puisque cette égalité est valable pour $x \in]0, \pi[$, mais en prenant la limite quand $x \to 0^+$ on obtient $\alpha_{n-1} = 0$. Ainsi on a $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 0$.

Répétons ce procédé p fois, de sorte que $\alpha_n = \cdots = \alpha_{n-p+1} = 0$. On a alors :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + \alpha_{n-p}(\cos(x))^{n-p}(\sin(x))^p = 0.$$

Encore une fois, en divisant par $(\sin(x))^p$ pour $x \neq 0$ et en faisant tendre x vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $\alpha_{n-p} = 0$. Par récurrence, on obtient la nullité de tous les scalaires α_0, …, α_n, donc la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
Comme, de plus, la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ engendre V_n, on en déduit que c'est une base de V_n. On a :

$$\dim(V_n) = \mathrm{card}\left((f_0, \ldots, f_n)\right) = n + 1.$$

Q22. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si $k = 0$ alors $f_0' = n\sin^{n-1}\cdot\cos = nf_1 \in V_n$, et si $k = n$ alors $f_n' = -n\cos^{n-1}\sin = -nf_{n-1} \in V_n$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a :

$$\begin{aligned} f_k' &= -k\sin\cdot\cos^{k-1}\cdot\sin^{n-k} + \cos^k\cdot(n-k)\cos\sin^{n-k-1} \\ &= -k\cos^{k-1}\sin^{n-(k-1)} + (n-k)\cos^{k+1}\sin^{n-(k+1)} \\ &= -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1} \end{aligned}$$

donc $f_k' \in V_n$ en tant que combinaison linéaire de vecteurs de V_n. Nous avons donc bien démontré que $f_k' \in V_n$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et donc par linéarité de la dérivation on en déduit :

$$\forall f \in V_n, \quad f' \in V_n$$

(nous disons ici implicitement que pour montrer la stabilité d'un espace vectoriel par un endomorphisme, il suffit de vérifier la stabilité sur une famille génératrice). Cela prouve que l'application $\varphi_n : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V_n. Les calculs ci-dessus peuvent d'ailleurs se réécrire ainsi :

$$\varphi_n(f_0) = nf_1, \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \varphi_n(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}, \quad \varphi_n(f_n) = -nf_{n-1},$$

donc la matrice de φ_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

Q23. On a immédiatement, grâce aux propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{ikx}e^{i(k-n)x} = \left(e^{ix}\right)^k\left(e^{-ix}\right)^{n-k} = (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}.$$

Q24. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\cos(x))^j(i\sin(x))^{k-j}\cdot\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}(\cos(x))^\ell(-i\sin(x))^{n-k-\ell}, \end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k}(-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell}\binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell}(\cos(x))^{\ell+j}(\sin(x))^{n-(j+\ell)},$$

ce qu'on peut écrire :

$$g_k = \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k}(-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell}\binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell} f_{\ell+j},$$

car $\ell + j \in [\![0,n]\!]$ si $0 \leqslant j \leqslant k$ et $0 \leqslant \ell \leqslant n-k$ (il n'apparaît donc pas des exposants de cosinus et sinus qui ne définiraient pas des fonctions de la base $(f_0,\dots,f_n)$ de V_n). Ceci démontre que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction g_k est combinaison linéaire des fonctions de la famille $(f_0,\dots,f_n)$ qui engendre V_n, donc : $g_k \in V_n$.

En vue de la question **Q30**, il est utile de réécrire g_k de sorte à bien identifier les coefficients en facteur de chaque f_m. Pour cela, pour tout $m \in [\![0,n]\!]$ on regroupe les ℓ et j tels que $\ell + j = m$ (ou encore $j = m - \ell$), et cela donne :

$$g_k = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{n-k-\ell}\binom{k}{m-\ell}\binom{n-k}{\ell}\right) i^{n-m} f_m. \tag{1}$$

Q25. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $g_k' = i(2k-n)g_k$, (on dérive une fonction exponentielle), c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \varphi_n(g_k) = i(2k-n)g_k.$$

Comme de plus $g_k \neq 0_{V_n}$, ceci démontre que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, g_k est un vecteur propre de φ_n, associé à la valeur propre $i(2k-n)$. Cela fournit $n+1$ valeurs propres distinctes de φ_n, qui est défini sur un espace vectoriel de dimension $n+1$ (d'après la question **Q21**), donc φ_n est diagonalisable.

On en déduit par ailleurs que :

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n) \mid k \in [\![0,n]\!]\},$$

et que les sous-espaces propres de φ_n sont de dimension 1 (vu qu'il y a $n+1$ sous-espaces propres et que la somme de leurs dimensions égale $\dim(V_n) = n+1$). Puisqu'ils sont de dimension 1, il suffit d'un vecteur propre pour les engendrer, et comme on l'a vu plus haut g_k est un vecteur propre associé à $i(2k-n)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \ker\left(\varphi_n - i(2k-n)\mathrm{Id}_{V_n}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(g_k\right).$$

Q26. Nous rappelons qu'un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Or φ_n est un endomorphisme défini sur un espace vectoriel de dimension finie, donc c'est un automorphisme si et seulement s'il est injectif, si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul, si et seulement si 0 n'est pas une de ses valeurs propres.

Nous avons déterminé ses valeurs propres à la question précédente, et nous en déduisons que 0 est valeur propre de φ_n si et seulement s'il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $2k - n = 0$, si et seulement s'il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que : $n = 2k$. Autrement dit, 0 est valeur propre de φ_n si et seulement si n est un entier pair.

Donc, à l'inverse : φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si n est un entier impair.

Q27. On reprend le calcul de la question **Q24** avec $k = n$. On obtient alors :

$$g_n = \sum_{j=0}^{n} i^{n-j} \binom{n}{j} f_j, \tag{2}$$

donc la matrice de g_n relativement à la base $\mathcal{B}_n = (f_0, \dots, f_n)$ est :

$$[g_n]_{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} i^n \binom{n}{0} \\ i^{n-1} \binom{n}{1} \\ \vdots \\ i^{n-j} \binom{n}{j} \\ \vdots \\ i^0 \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $q_j = i^{n-j} \dbinom{n}{j}$.

Pour en déduire le sous-espace propre de B_n associé à la valeur propre in, rappelons que B_n est la matrice de φ_n dans la base $\mathcal{B}_n$ (question **Q22**). Il y a donc une correspondance entre les sous-espaces propres de B_n et de φ_n. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in V_n$:

$$\varphi_n(f) = \lambda f \iff B_n [f]_{\mathcal{B}_n} = \lambda [f]_{\mathcal{B}_n}.$$

En particulier, comme $\ker(\varphi_n - in\mathrm{Id}_{V_n}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(g_n)$, on a :

$$\ker(B_n - in\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}([g_n]_{\mathcal{B}_n}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right),$$

d'où le résultat.

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Q28. Soit $(k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2$. Le coefficient (k, ℓ) de DM est, avec les notations de l'énoncé :

$$\sum_{t=1}^{n} d_{k,t} m_{t,\ell},$$

et comme $d_{k,t} = 0$ dès que $k \neq t$, le coefficient (k, ℓ) de DM est simplement $d_{k,k} m_{k,\ell}$.
Un calcul analogue permet de montrer que le coefficient (k, ℓ) de MD est $d_{\ell,\ell} m_{k,\ell}$.
Pour résumer et retenir plus facilement le résultat :

— multiplier une matrice M **à gauche** par une matrice diagonale revient à multiplier la k^{e} **ligne** de M par le k^{e} coefficient diagonal de D, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$;

— multiplier M **à droite** par une matrice diagonale revient à multiplier la k^{e} **colonne** de M par le k^{e} coefficient diagonal de D, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Q29. La matrice D_n^{-1} est une matrice diagonale dont le k^{e} coefficient diagonal est $d_{k,k}^{-1} = (i^{-1})^{k-1} = (-i)^{k-1}$. En utilisant la question précédente pour faciliter la multiplication de A_n par les matrices diagonales D_n^{-1} et D_n, on trouve que pour tout $(k,\ell) \in [\![1, n+1]\!]^2$ le coefficient (k,ℓ) de $D_n^{-1}A_nD_n$ (qu'on note $b_{k,\ell}$ pour la suite) est :

$$b_{k,\ell} = d_{k,k}^{-1}d_{\ell,\ell}a_{k,\ell} = (-i)^{k-1}i^{\ell-1}a_{k,\ell} = (-1)^{k-1}i^{k+\ell-2}a_{k,\ell} = (-1)^{k-1}i^{k+\ell}a_{k,\ell}.$$

En utilisant la définition des $a_{k,\ell}$ donnée dans l'énoncé, et le fait que $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, on en déduit :

$$\begin{cases} b_{k,k+1} &= (-1)^{k-1}i^{2k+1}a_{k,k+1} = -ik & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n, \\ b_{k,k-1} &= (-1)^{k-1}i^{2k-1}a_{k,k-1} = i(n-k+2) & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant n+1, \\ b_{k,\ell} &= 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On reconnaît immédiatement que $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$.
Ceci démontre notamment que les matrices A_n et $-iB_n$ sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique. On en déduit :

$$\chi_{A_n}(X) = \chi_{-iB_n}(X) = \det(X + iB_n) = (-i)^{n+1}\det((-i)^{-1}X - B_n) = (-i)^{n+1}\chi_{B_n}(iX)$$

en utilisant encore une fois le fait que $i^{-1} = -i$.

Q30. La question précédente montre que A_n et $-iB_n$ sont semblables, et de plus B_n est diagonalisable parce que φ_n l'est (question **Q25**), et la description qu'on a donnée du spectre implique plus précisément qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$B_n = P \begin{pmatrix} -in & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i(2k-n) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & in. \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus précisément, et cela importera pour la suite : on peut prendre pour P la matrice de passage de la base $(f_0, \dots, f_n)$ dans la base de vecteurs propres $(g_0, \dots, g_n)$. On a alors :

$$-iB_n = P \begin{pmatrix} i^2n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -i^2(2k-n) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -i^2n. \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (2k-n) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n. \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Notons Δ_n la matrice diagonale du membre de droite. On a :

$$A_n = D_n(-iB_n)D_n^{-1} = (D_nP)\Delta_n(D_nP)^{-1}.$$

Ainsi A_n est semblable à Δ_n, donc elles ont même polynôme caractéristique et mêmes valeurs propres. On en déduit :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Delta_n) = \{2k - n \mid k \in [\![0, n]\!]\}.$$

Il en découle que $A_n \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ admet $n+1$ valeurs propres réelles distinctes, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pour en déduire le sous-espace propre de A_n associé à la valeur propre n (c'est bien une valeur propre : prendre l'élément du spectre correspondant à $k = n$), la relation de similitude

$A = (D_nP)\Delta_n(D_nP)^{-1}$ montre qu'il suffit de prendre le sous-espace engendré par la dernière colonne de (D_nP) (en effet n est le dernier coefficient diagonal de Δ_n). Comme :

$$D_nP = D_n\mathrm{M}_{(f_0,\dots,f_n)}((g_0,\dots,g_n)),$$

l'égalité (2) et la multiplication par la matrice diagonale D_n impliquent immédiatement que la dernière colonne de D_nP est :

$$\begin{pmatrix} 1\cdot i^n\binom{n}{0} \\ i\cdot i^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots \\ i^n\cdot\binom{n}{n} \end{pmatrix} = i^n\begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

et on en déduit que si l'on pose : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $p_j = \binom{n}{j}$, alors :

$$\ker(A_n - n\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}\right)$$

d'où le résultat.

Partie IV – Un peu de probabilités

Q31. C'est un système complet d'évènements. Il faut bien en effet qu'il y ait à tout instant un certain nombre de boules dans l'urne U_1, qui soit compris entre 0 et n, et donc qu'à tout instant k il existe exactement un entier $\ell \in [\![0,n]\!]$ tel que $(N_k = \ell)$ se réalise.

Q32. Supposons d'abord $j \in [\![1, n-1]\!]$. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, alors soit elle en contiendra $j+1$ à l'instant $k+1$ (si on tire le numéro d'une boule dans l'urne U_2, qu'on change donc de place pour la mettre dans l'urne U_1), soit elle en contiendra $j-1$ (si on tire le numéro d'une boule dans l'urne U_1 et qu'on l'en retire). Il n'y a pas d'autre possibilité.

Les cas $j = 0$ et $j = n$ sont à part : si $j = 0$, alors il n'y a pas de boule dans l'urne U_1 à l'instant k, et on est donc assuré que c'est une boule de l'urne U_2 qui va changer de place et augmenter l'effectif de l'urne U_1. La seule possibilité est donc d'avoir $j+1 = 1$ boule dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$. Si $j = n$, un raisonnement analogue montre qu'il ne peut y avoir que $n-1$ boules à l'instant $k+1$ dans l'urne U_1.

Q33. Soient $k \in \mathbb{N}$, et $j, \ell \in [\![0,n]\!]$.

Supposons d'abord que $\ell = 0$. D'après la question précédente, on a $\mathbb{P}_{E_{k,0}}(E_{k+1,j}) = 0$ pour tout $j \neq 1$, et on a clairement $\mathbb{P}_{E_{k,0}}(E_{k+1,1}) = 1$ (on ne peut que tirer le numéro d'une boule dans l'urne U_2, s'il n'y en a pas du tout dans l'urne U_1).

Un raisonnement analogue pour $\ell = n$ permet d'en déduire que $\mathbb{P}_{E_{k,n}}(E_{k+1,j}) = 0$ pour tout $j \neq n-1$, et que $\mathbb{P}_{E_{k,n}}(E_{k+1,n-1}) = 1$.

Supposons enfin $\ell \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, d'après la question précédente, on a $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) = 0$ pour tout $j \notin \{\ell+1, \ell-1\}$. Il reste donc à déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell+1})$ et $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell-1})$. Or, s'il y a ℓ boules dans l'urne 1 à l'instant k, et si la probabilité est uniforme de tirer chaque boule, alors la probabilité de tirer le numéro d'une boule dans l'urne U_1 est égale à $\frac{\ell}{n}$, et c'est à cette condition que $E_{k+1,\ell-1}$ est réalisé. Donc : $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell-1}) = \frac{\ell}{n}$. De même, la probabilité de tirer le numéro d'une boule dans l'urne U_2 est égale à $\frac{n-\ell}{n}$, et c'est à cette condition que $E_{k+1,\ell+1}$ est réalisé. Donc : $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell+1}) = \frac{n-\ell}{n}$.

Remarquons que les formules $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell-1}) = \frac{\ell}{n}$ et $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell+1}) = \frac{n-\ell}{n}$ englobent ce qu'on avait trouvé pour $\ell = n$ et $\ell = 0$ respectivement. On peut donc récapituler les résultats obtenus ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rll} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell+1}) & = \frac{n-\ell}{n} & \text{si } 0 \leqslant \ell \leqslant n-1, \\ \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell-1}) & = \frac{\ell}{n} & \text{si } 1 \leqslant \ell \leqslant n, \\ \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) & = 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{array}\right. \tag{3}$$

Je n'ai pas suivi la distinction de cas proposée dans l'énoncé.

Q34. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si l'on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(E_{k,\ell})_{0 \leqslant \ell \leqslant n}$, on obtient :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,\ell}). \tag{4}$$

Grâce aux probabilités calculées dans la question précédente (égalités (3)), on obtient immédiatement les résultats demandés :

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0})\mathbb{P}(E_{k,1}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}),$$

$$\mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n})\mathbb{P}(E_{k,n-1}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1}),$$

et pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{k+1,j}) &= \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j+1}) \\ &= \frac{n-(j-1)}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1}), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Q35. Les égalités (4) de la question précédente peuvent s'écrire matriciellement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_{k+1} = \Big(\big(\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j})\big)\Big)_{1 \leqslant j,\ell \leqslant n} \times Z_k = \frac{1}{n}A_n Z_k.$$

C'est encore plus flagrant si l'on compare les égalités (3) avec la définition des coefficients $a_{k,\ell}$ de A_n donnée dans l'énoncé. Par une récurrence facile on a donc bien, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Z_k = \frac{1}{n^k}A_n^k Z_0.$$

Q36. Puisqu'il est supposé que les n boules sont placées de manière équiprobable, chaque boule a probabilité $\frac{1}{2}$ d'être placée à l'instant $k = 0$ dans l'urne U_1. On en déduit que N_0 compte le nombre de succès – être dans l'urne U_1 – dans une série de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi N_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En particulier $N_0(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(N_0 = j) = \binom{n}{j}\frac{1}{2^j} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j}\frac{1}{2^n}.$$

Q37. Soit $k \in \mathbb{N}$. Dire que N_k a la même loi que N_0 équivaut exactement au fait que $Z_k = Z_0$. Or, d'après la question précédente, on a :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(N_0 = 0) \\ \mathbb{P}(N_0 = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(N_0 = n) \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

avec les notations de la question **Q30**. D'après cette même question, on a donc :

$$Z_0 \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}\right) = \ker(A_n - n\mathrm{I}_{n+1}),$$

c'est-à-dire : $A_n Z_0 = nZ_0$. Par une récurrente immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_n^k Z_0 = n^k Z_0$. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0 = \frac{1}{n^k} \times n^k Z_0 = Z_0,$$

ce qu'on voulait démontrer : les N_k ont tous la même loi.

Q38. Supposons que toutes les variables les N_k suivent la même loi, et montrons que dans ce cas la loi en question est nécessairement la loi π. Pour cela, on note que sous cette hypothèse, on a $Z_k = Z_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en particulier on a $Z_1 = Z_0$. Or $Z_1 = \frac{1}{n} A_n Z_0$ d'après la question **Q35**, donc l'égalité $Z_1 = Z_0$ équivaut à : $A_n Z_0 = nZ_0$, et donc à : $Z_0 \in \ker(A_n - n\mathrm{I}_{n+1})$. D'après la question **Q30**, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$Z_0 = \alpha \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(N_0 = j) = \alpha\binom{n}{j}$. Mais la famille $((N_0 = j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ étant un système complet d'évènements, on doit avoir : $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_0 = j) = 1$, c'est-à-dire : $\alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 1$.

On sait calculer cette somme grâce à la formule du binôme du Newton. On a : $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^j 1^{n-j} = (1+1)^n = 2^n$. Ainsi l'égalité ci-dessus impose : $\alpha = \frac{1}{2^n}$, et finalement :

$$Z_0 = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix},$$

donc Z_0 suit la loi π que nous avions explicitée dans la question **Q36** (et les Z_k aussi puisque toutes ces variables suivent la même loi).

En conclusion, nous avons démontré que si toutes les variables N_k suivent la même loi, alors ce doit être la loi π (sachant que la question précédente démontre qu'effectivement, la loi π respecte cette contrainte). C'est donc l'unique loi à vérifier la propriété de l'énoncé : d'où le résultat.