Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- e : le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x.
Pour tout entier naturel n, on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0!=1$.

Si j et n sont deux entiers naturels fixes tels que $0 \leq j \leq n$, on note :

- $[\![j,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $j \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{j}$ le nombre de parties ayant j éléments d'un ensemble de n éléments.

On rappelle que pour tout entier naturel j élément de $[\![0,n]\!]$ on a : $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

Si f est une fonction k fois dérivable sur un intervalle I (avec $k \geq 1$) on note f' (resp. $f^{(k)}$) sa fonction dérivée (resp. sa fonction dérivée k-ième).

Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, donc une suite réelle, on utilise la notation usuelle : $u(n)=u_n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x|<\dfrac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x.

<u>Objectifs :</u>

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1}n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

Dans la partie I on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie II on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n. La partie III est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des deux séries $\sum_{n\geq 0}\delta_n$ et $\sum_{n=1}\dfrac{|\delta_n|}{n}$.

PARTIE I

Les suites α et β

On définit la suite α par $\alpha_0=1$ et la relation de récurrence :

pour tout n de $\mathbb{N}$: $\alpha_{n+1}=(n+1)\alpha_n+(-1)^{n+1}$.

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$; en particulier

pour $x=-1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note : $\displaystyle\beta_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ et $\displaystyle\rho_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

I.1/ Étude de la suite α.

I.1.1/ Expliciter α_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.

I.1.2/ Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2/ Étude de la suite β.

I.2.1/ Expliciter β_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.

I.2.2/ Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2.3/ Expliciter $\beta_{n+1}-(n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2.4/ Comparer les deux suites α et β.

I.3/ Étude de ρ_n.

I.3.1/ Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

I.3.2/ Etablir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
L'inégalité est-elle stricte ?

I.3.3/ Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

I.4/ Étude d'une fonction.

On désigne par f la fonction définie et de classe C^1 (au moins) sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0)=1 \text{ et pour tout } x \text{ de }]-1\,;\,1[: \quad (1-x)f'(x)-x\,f(x)=0.$$

I.4.1/ Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f. Expliciter $f(x)$ pour tout x de $]-1\,;\,1[$.

I.4.2/ Justifier l'affirmation : « f est de classe C^∞ sur $]-1\,;\,1[$ ».

I.4.3/ Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n :

$$(1-x)f^{(n+1)}(x)-(n+1)f^{(n)}(x) \text{ en fonction de } n \text{ et de } x.$$

I.4.4/ En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

PARTIE II

La suite γ

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel.
Pour $n \geq 1$ on note :

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$,

- γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathcal{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$ on adopte la convention : $\gamma_0 = 1$.

II.1/ Calculer γ_1 et γ_2.

II.2/ Classer les éléments de $\mathcal{S}_3$ selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3.

II.3/ On suppose dans cette question que $n = 4$.

II.3.1/ Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant deux points fixes ?

II.3.2/ Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant un point fixe ?

II.3.3/ Calculer γ_4.

II.4/ Relation entre les γ_k.

II.4.1/ Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$.

II.4.2/ Si $0 \leq k \leq n$, combien d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

II.4.3/ Etablir pour tout entier naturel n la relation : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k = n!$.

II.5/ On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ et l'on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

II.5.1/ Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

II.5.2/ Pour tout x de $]-1\ ;\ 1[$, on pose $h(x) = g(x)e^x$.
Justifier l'existence du développement en série entière de la fonction h sur $]-1\ ;\ 1[$ et expliciter ce développement.

II.5.3/ Expliciter $g(x)$ pour tout nombre réel x de $]-1\ ;\ 1[$. En déduire la valeur du rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$.

II.5.4/ Comparer les deux suites β et γ.

II.5.5/ La fonction g est-elle définie en 1 ?

II.5.6/ La fonction g est-elle définie en -1 ?

II.5.7/ Calculer γ_8.

PARTIE III

Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$

Pour tout entier naturel n on note :

- $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.
- $J_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.
- $v_n = (-1)^{n+1} J_n$.

III.1/ La série $\sum_{n\geq 0} v_n$.

III.1.1/ Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

III.1.2/ Établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$.

III.2/ Estimation intégrale de δ_n.

III.2.1/ Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \mathrm{d}t \qquad (1).$$

III.2.2/ Déduire de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n.

III.3/ Sur la série $\sum_{n\geq 0} \delta_n$.

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

III.4/ Sur la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.1/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.2/ On pose $\mathrm{A} = -\int_0^1 e^x \ln(1-x)\mathrm{d}x$.

III.4.2.1/ Justifier la convergence de l'intégrale impropre A.

III.4.2.2/ Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$ en fonction de l'intégrale A.

III.4.3/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ et expliciter la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.4/ Expliciter un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ vérifiant $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{600}$.

Fin de l'énoncé.