**<u>Concours Communs Polytechniques</u>**
**PSI**
Mathématiques **2** ; session **2004**

## <u>Partie I</u>

1. Pour p et q entiers, $a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1)\, a_{p+1,q}$

   1.1. Pour tout q de **N**, $a_{1,q+1} = a_{0,q} + a_{1,q}$. Donc $a_{1,1} = a_{0,0} + a_{1,0} = 1$ et pour q > 0, $a_{1,q+1} = a_{1,q}$. Pour tout q de N*, $a_{1,q} = 1$.

   1.2. $a_{2,1} = a_{1,0} + 2a_{2,0} = 0$ ; $a_{2,2} = a_{1,1} + 2a_{2,1} = 1$.

   1.3. Pour q > 1, $a_{2,q} = a_{1,q-1} + 2a_{2,q-1} = 1 + 2a_{2,q-1}$. D'où $a_{2,3} = 1 + 2\times 1 = 2$ ; $a_{2,4} = 1 + 2\times 3 = 7$ ; $a_{2,5} = 1 + 2\times 7 = 15$. On montre par récurrence que $a_{2,q} = 2^{q-1} - 1$.

   1.4. La propriété $P_0$ est vraie car pour tout q de N, $a_{0,q} = 1$ ou $0 \in \mathbb{N}$.
   Supposons la propriété vraie pour un entier p donné : comme $a_{p+1,0} \in \mathbb{N}$, la relation de définition permet de montrer, par récurrence sur q, que tous les éléments $a_{p+1,q}$ sont dans N. $P_{p+1}$ est vraie.

   1.5. Montrons par récurrence sur q la propriété $R_q : \forall p \in \mathbb{N}, p > q \Rightarrow a_{p,q} = 0$.
   La propriété $R_0$ est vraie car, pour tout p de N*, $a_{p,0} = 0$.
   Supposons $R_q$ vraie : $\forall p \in \mathbb{N}, p > q+1 \Rightarrow a_{p,q+1} = a_{p-1,q} + p a_{p,q}$ avec $p-1 > q$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, p > q+1 \Rightarrow a_{p,q+1} = 0$. $R_{q+1}$ est vraie.

   1.6. On obtient alors facilement, pour tout p $a_{p,p} = 1$.

Par calcul direct ou en utilisant une procédure Maple

```
> A:=proc(n)
local Z,p,q,k;
Z:=matrix(n+1,n+1);
Z[1,1]:=1;
for k from 2 to n+1 do Z[k,1]:=0;  Z[1,k]:=0; od;
for p from 1 to n do for q from 1 to n do Z[p+1,q+1]:=Z[p,q]+
(p)*Z[p+1,q];od;od;
print(Z); end:
```

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$A(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Partie II**

1. $M \in M_{n+1}(\mathbb{Z})$

   1.1. $\det(M)$ est une somme de produits de coefficients de M, donc d'entiers. $det(M) \in \mathbb{Z}$.

   1.2. Les coefficients de $com(M)$ sont des déterminants d'ordre n extraits de M. Ce sont tous des entiers.

   1.3. Si $\det(M) = \pm 1$, M est inversible en tant que matrice de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ et son inverse est $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,{}^t(com(M)) = \pm\,{}^t(com(M)) \in M_{n+1}(\mathbb{Z})$.

   Réciproquement si M est inversible dans $M_{n+1}(\mathbb{Z})$, il existe une matrice Q de $M_{n+1}(\mathbb{Z})$ telle que $MQ = QM = I_{n+1}$. Et donc : $\det(M) \times \det(Q) = 1$.
   Or ces deux déterminants sont des entiers inversibles dans $\mathbb{Z}$.
   On a donc $\det(M) = \pm 1$.

2. $B_0 = 1$ ; pour p>0, $B_p = \prod_{j=0}^{p-1}(X - j)$

   2.1. Pour tout p de N, $\partial^{\circ}(B_p) = p$. Pour n entier de N, la famille $(B_0, \ldots, B_n)$ est une famille de polynômes étagés en degré. Elle est libre. On obtient une famille libre de n+1 vecteurs de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui est de dimension n+1. C'est une base de cet espace.

   2.2. On obtient par calcul : $B_0 = 1$, $B_1 = X$, $B_2 = X^2 - X$, $B_3 = X^3 - 3X^2 + 2X$, $B_4 = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X$.

   $$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad Q_4 = P_4^{-1}$$

   La résolution du système triangulaire $P_4 X = B$ donne aisément la matrice inverse et on a $Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(4)$

   2.3. Pour tout entier k, $0 \le k \le n$, $B_k \in \mathbb{R}_k[X] = Vect(1, X, \ldots, X^k)$. La matrice de passage de $(H)$ à $(B)$ est donc triangulaire supérieure. Comme un produit de polynômes à coefficients entiers est un polynôme à coefficients entiers, pour tout k > 0, $B_k = \prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$ est à coefficients entiers.

2.4. Pour tout entier k $B_k$ est un polynôme de degré k de coefficient dominant 1.
Les éléments diagonaux de la matrice $P_n$ sont tous égaux à 1 et, comme cette matrice est triangulaire supérieure, $\det(P_n)=1$.

2.5. Pour tout k, $Vect(B_0,...,B_k)=Vect(1,...,X^k)$ et le vecteur $X^k$ s'exprime donc comme combinaison linéaire des $B_j$, $0\le j\le k$. La matrice de passage de $(B)$ à $(H)$ est également triangulaire supérieure. C'est l'inverse de la matrice $P_n$, matrice à coefficients entiers de déterminant 1. D'après la question 1.3 cette matrice est aussi élément de $M_{n+1}(¢)$.

2.6. $X^q=\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p$.
En particulier $X^0=1=\beta_{0,0}B_0=\beta_{0,0}$ et pour q > 0, en évaluant la relation en 0, 1 et 2 on a : $0=\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p(1)=\beta_{0,q}\times 1+0=\beta_{0,q}$ ;
$1^q=\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p(1)=\beta_{0,q}+\beta_{1,q}\times 1$ et donc $\beta_{1,q}=1$ pour q > 0. De même
$2^q=\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p(2)=\beta_{0,q}+\beta_{1,q}\times 2+\beta_{2,q}\times 2$ et pour q > 1, $\beta_{2,q}=\dfrac{2^q-2}{2}=2^{q-1}-1$.

2.7. Comme la matrice $Q_n$ est triangulaire supérieure, pour tout entiers p et q, $p>q\Rightarrow\beta_{p,q}=0$.
Mais pour tout entier q,
$$X^{q+1}=X\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p=\sum_{p=0}^{q+1}\beta_{p,q+1}B_p=\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}(X-p+p)B_p$$
soit $X^{q+1}=\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_{p+1}+p\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p=\sum_{p=1}^{q+1}\beta_{p-1,q}B_p+p\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,q}B_p$
Par suite, par unicité de la décomposition dans la base $(B)$ on a, pour tout entier strictement positif p, $p\le q+1$, $\beta_{p,q+1}=\beta_{p-1,q}+p\beta_{p,q}$.
Comme $p>q\Rightarrow\beta_{p,q}=0$, les coefficients $\beta_{p,q}$ vérifient les conditions de définition des coefficients $a_{p,q}$. D'où, pour tout n de N, $Q_n=A_n$.

**Partie III**

$F=C^\infty(]0,+\infty[,¡)$ ; $\Phi(f)=g\Leftrightarrow\forall x>0, g(x)=xf'(x)$.

1. On montre facilement que $\Phi$ est un endomorphisme de E.
Pour g élément quelconque de F, soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x\frac{g(t)}{t}dt$
.
Comme $t\mapsto\dfrac{g(t)}{t}$ est de classe $c^\infty$ sur $¡^{+*}$, f, primitive de cette fonction sur

l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ est aussi de classe $C^{\infty}$. De plus : $\forall x>0, f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$. Donc $\Phi(f)=g$.

L'application $\Phi$ est surjective.

$\Phi(f)=0 \Leftrightarrow \forall x>0, f'(x)=0 \Leftrightarrow f$ constante sur $]0,+\infty[$.

$Ker\Phi$ est l'espace vectoriel de dimension 1 constitué des fonctions constantes sur $]0,+\infty[$.

$\Phi$ n'est pas injective.

2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. $\Phi(f)=\alpha f$ si et seulement si $f$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $xy'=\alpha y$. La solution générale de cette équation est $y(x)=ce^{\int\alpha\frac{dx}{x}}=cx^{\alpha}$.

   L'ensemble des valeurs propres de $\Phi$ est $\mathbb{R}$. Pour chaque valeur propre $\alpha$, l'espace propre associé est la droite vectorielle dirigée par la fonction de F $x\mapsto x^{\alpha}$.

3. Avec les notations précédentes, si $h=\Phi^2(f)=\Phi(g)$, pour tout x strictement positif, $h(x)=xg'(x)=x\left(f'(x)+xf''(x)\right)=x^2f''(x)+xf'(x)$.

   $f\in Ker\Phi^2 \Leftrightarrow g\in Ker\Phi \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R}\ /\ \forall x>0, xf'(x)=c$

   $f\in Ker\Phi^2 \Leftrightarrow \exists(c,d)\in\mathbb{R}^2\ /\ \forall x>0, f(x)=c\ln x+d$

   $Ker\Phi^2$ est un sous- espace vectoriel de F de dimension 2 engendré par les deux fonctions $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto 1$.

4. Pour q=1, f élément quelconque de F, x > 0, $\Phi(f)(x)=xf'(x)=1\times x^1f^{(1)}(x)$

   La relation demandée est vraie avec $d_{1,1}=1$.

   Supposons la propriété vraie pour q quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

   On a : $\forall f\in F$, $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\Phi^{q+1}(f)(x)=\Phi\left[\Phi^q(f)\right](x)=x\dfrac{d}{dx}\left[\sum_{p=1}^{q}d_{p,q}x^pf^{(p)}(x)\right]$

   $$\Phi^{q+1}(f)(x)=x\sum_{p=1}^{q}pd_{p,q}x^{p-1}f^{(p)}(x)+x\sum_{p=1}^{q}d_{p,q}x^pf^{(p+1)}(x)$$

   $$\Phi^{q+1}(f)(x)=\sum_{p=1}^{q}pd_{p,q}x^pf^{(p)}(x)+\sum_{p=1}^{q}d_{p,q}x^{p+1}f^{(p+1)}(x)=\sum_{p=1}^{q}pd_{p,q}x^pf^{(p)}(x)+\sum_{p=2}^{q+1}d_{p-1,q}x^pf^{(p)}(x)$$

   $$\Phi^{q+1}(f)(x)=d_{1,q}xf'(x)+\sum_{p=2}^{q}\left(pd_{p,q}+d_{p-1,q}\right)x^pf^{(p)}(x)+d_{q,q}x^{q+1}f^{(q+1)}$$

   La relation est vraie au rang q+1 avec, pour tout p de $⟦2,q⟧$,
   $d_{p,q+1}=pd_{p,q}+d_{p-1,q}$, $d_{1,q+1}=d_{1,q}$, $d_{q+1,q+1}=d_{q,q}$.

5. Avec les conventions proposées, les $d_{p,q}$ vérifient les mêmes conditions de définition que les $a_{p,q}$.

**Partie IV**

1. $\varphi(t)=\exp\left(e^t-1\right)$

1.1. $e^X \underset{0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} + o\left(X^4\right)$

Par composition :

$$\varphi(t) \underset{0}{=} 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(t + \frac{t^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}t^4 + o\left(t^4\right)$$

$$\varphi(t) \underset{0}{=} 1 + t + t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + t^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + t^4\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{1}{24}\right) + o\left(t^4\right)$$

$$\varphi(t) \underset{0}{=} 1 + t + t^2 + \frac{5}{6}t^3 + \frac{5}{8}t^4 + o\left(t^4\right).$$

1.2. $\varphi$ est de classe $c^\infty$ sur ¡ . Son développement limité en 0 est

$$\varphi(t) \underset{0}{=} \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + \frac{t^3}{6}\varphi^{(3)}(0) + \frac{t^4}{24}\varphi^{(4)}(0) + o(t^4)$$

Par unicité du développement limité on a :

$\varphi'(0) = 1, \varphi''(0) = 2, \varphi^{(3)}(0) = 5, \varphi^{(4)}(0) = 15$.

2. $P_n^j$ est le nombre de partitions d'un ensemble E de cardinal n en j classes.

2.1. Comme chaque classe comporte au moins un élément, si j est le nombre de classes $j \le n$. Donc si $j > n$ on ne peut construire de partition de E comportant j classes et $P_n^j = 0$.

2.2. Soit $n \in$ ¥ $^*$. Il existe une seule partition comportant une classe : la seule classe est E. D'où $P_n^1 = 1$. De même la seule partition comportant n classes est celle où les classes sont constituées de tous les sous-ensembles à un élément de E. $P_n^n = 1$.

2.3. $j \ge 2$, $n \ge 1$

Soit a un élément fixé de E.

Les partitions de E à j classes sont de deux sortes :

ou bien $\{a\}$ est une classe de cette partition et les autres classes forment une partition à j-1 classes de $E \setminus \{a\}$, ensemble de cardinal n-1.

Il y en a $P_{n-1}^{j-1}$ de ce type.

ou bien la classe qui contient a n'est pas réduite à $\{a\}$ l'intersection des j classes avec $E \setminus \{a\}$ donne une partition de $E \setminus \{a\}$ en j classes. Une partition de $E \setminus \{a\}$ en j classes étant donnée on peut « remonter » à une partition de E en j classes en conservant j-1 classes et en en ajoutant l'élément a à l'une des j classes de la partition. Il y a donc au total $j \times P_{n-1}^j$ manières de procéder.

Par suite : $P_n^j = P_{n-1}^{j-1} + jP_{n-1}^j$.

2.4. Les relations de définition de ces entiers sont les mêmes que dans la partie I.

3. $P_n$ est le nombre de partitions de E.

3.1. Si $E=\{a\}$, la seule partition de E est celle composée d'une classe $\{a\}$.

$P_1=1$

Si $E=\{a,b\}$ 2 partitions, $(\{a,b\})$ et $(\{a\},\{b\})$. $P_2=2$

Si $E=\{a,b,c\}$, $P_3=P_3^1+P_3^2+P_3^3=2+P_3^2$

Mais d'après 2.3, $P_3^2=P_2^1+2P_2^2=3$ et $P_3=5$

Enfin $P_4=P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4^4=2+P_4^2+P_4^3$ avec $P_4^2=P_3^1+2P_3^2=1+6=7$ et $P_4^3=P_3^2+3P_3^3=3+3=6$ ; $P_4=2+7+6=15$

3.2. $P_n=\sum_{j=1}^{n}P_n^j$

3.3. Les $P_n$ sont des entiers positifs. Montrons par récurrence que $P_n\le n!$.

$P_1=1\le 1$. Supposons que, pour n donné, pour tout k, $0\le k\le n$, $P_k\le k!$.

On a alors $P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kP_k\le\sum_{k=0}^{n}C_n^kk!=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}=n!\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{(0)!}\right)$

et $P_{n+1}\le n!\times(n+1)=(n+1)!$. La propriété est vraie au rang n+1.

4. $s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_n}{n!}x^n$.

4.1. Pour $x\in[0,1[$, $n\in\mathbb{N}$, $0\le\frac{P_n}{n!}x^n\le x^n$. Comme $\sum x^n$ est convergente, par comparaison de séries de termes positifs, $\sum\frac{P_n}{n!}x^n$ est convergente.

Le rayon de convergence de cette série entière est donc supérieur ou égal à 1.

4.2. Si $x\in]-1,1[$, $s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{P_n}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{P_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_{n+1}}{n!}x^n$

En utilisant $(1)$, $s'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kP_k\right)}{n!}x^n$

La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $]-1,1[$, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergente donne :

$s(x)\exp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_n}{n!}x^n\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ avec, pour tout n de N,

$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k}{k!}\times\frac{1}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^kP_k}{n!}$.

On a donc : $\forall x\in]-1,1[$, $s'(x)=e^xs(x)$.

4.3. La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=e^xy$ est $y(x)=ke^{\int e^xdx}=k\exp(e^x)$, k réel.

En particulier il existe un réel k tel que, pour tout x de $]-1,1[$,

$s(x) = k\exp(e^x)$

Comme $s(0) = P_0 = 1$ et donc $1 = k\exp(1)$ ; $k = e^{-1}$.

Par suite $s(x) = \exp(e^x - 1) = \varphi(x)$

4.4. Le développement en série entière est unique $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Donc pour tout n de N, $s^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0) = P_n$.