2002 – CCP PSI – Maths 2

corrigé – par Michel Staïner, le 07/05/02

PARTIE I

I.1.1. Sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, (E_0) s'écrit $y'' - y = 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_0) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, +\infty[\text{ est } y = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x,\ (A, B) \in \mathbf{R}^2.}$$

I.1.2. Par conséquent, si f est solution de (E_0) sur $\mathbf{R}$, il existe (A, B, C, D) dans $\mathbf{R}^4$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x & \text{si } x < 0 \\ C \operatorname{ch} x + D \operatorname{sh} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et la continuité de f en 0 nécessite $A = C$ et $f(0) = A$, sa dérivabilité en 0 nécessite $B = D$. Réciproquement, $f : x \mapsto A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x$ est solution sur $\mathbf{R}$:

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_0) \text{ sur } \mathbf{R} \text{ est } y = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x,\ (A, B) \in \mathbf{R}^2.}$$

I.2.1. En tant que somme d'une série entière, y est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ avec :

$$\forall x \in]-R, R[\quad x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) u_k x^k \quad \text{et} \quad x^2 y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-2} x^k.$$

d'où les relations — traduisant le fait que y est solution de (E_n) :

$$\left(n - n^2\right) u_0 = \left(n - n^2\right) u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2 \quad \left(k(k-1) + \left(n - n^2\right)\right) u_k - u_{k-2} = 0.$$

Puisqu'ici $n \geq 2$, $n - n^2$ est non nul et j'en déduis :

$$\boxed{u_0 = u_1 = 0.}$$

I.2.2. D'après ce qui précède :

$$\boxed{\forall k \geq 2 \quad (k - n)(k + n - 1) u_k = u_{k-2}.}$$

I.2.3. Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, j'ai $(k - n)(k + n - 1) \neq 0$ et donc

$$u_k = \frac{u_{k-2}}{(k - n)(k + n - 1)}.$$

Comme $u_0 = u_1 = 0$ d'après **I.2.1.**, une récurrence immédiate fournit :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad u_k = 0.}$$

I.2.4. En particulier, $u_{n-1} = 0$; or, en remplaçant k par $n + 2p + 1$ dans la relation précédente, j'obtiens

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad u_{n+2p+1} = \frac{u_{n+2p-1}}{(2p+1)(2p+2n)}$$

d'où, toujours par récurrence,

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N} \quad u_{n+2p+1} = 0.}$$

I.2.5. De même, en remplaçant k par $n + 2p$, j'obtiens

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \quad u_{n+2p} = \frac{u_{n+2p-2}}{2p(2p + 2n - 1)}.$$

Je montrerais cette fois par récurrence l'existence d'une suite $(q_{p,n})_{p \in \mathbf{N}}$ de nombres rationnels tels que

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \quad u_{n+2p} = q_{p,n} \cdot u_n$$

mais la valeur de u_n reste arbitraire (on a exploité toutes les relations du **I.2.2.**, celle obtenue pour $k = n$ ne donnant rien, si ce n'est $0 = u_{n-2}$ que l'on a déjà prouvé…). Ainsi

$$\boxed{\text{On ne peut pas “calculer” } u_n.}$$

N.B. La formulation est discutable… Cela traduit le fait que l'ensemble des solutions développables en série entière de (E_n) est une droite vectorielle (puisqu'on obtient un rayon de convergence non nul, *cf.* la question suivante). On vérifie — ce qui n'est pas demandé dans l'énoncé — que

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \quad u_{n+2p} = \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(p+n)!}{p!\,(2p+2n)!} \cdot u_n.$$

I.2.6. Compte tenu des résultats précédents, $y(x)$ est de la forme :

$$y(x) = u_n x^n \sum_{p=0}^{\infty} q_{p,n} \left(x^2\right)^p \quad \text{où} \quad \frac{q_{p+1,n}}{q_{p,n}} = \frac{1}{(2p+2)(2p+2n+1)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la série entière $\sum q_{p,n} z^p$ a un rayon de convergence infini et donc la série définissant $y(x)$ converge pour tout réel x. Autrement dit :

$$\boxed{R = +\infty.}$$

I.3.1. Par définition,

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad C_{k,0} = \frac{1}{(2k)!} \quad \text{et} \quad C_{k,1} = \frac{2(k+1)}{(2k+2)!} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

Je reconnais alors des développements en série entière usuels :

$$\boxed{\varphi_0(x) = \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \operatorname{sh} x.}$$

I.3.2. Je procède comme au **I.2.6.** :

$$\varphi_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n} \left(x^2\right)^k \quad \text{et} \quad \frac{C_{k+1,n}}{C_{k,n}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ;$$

il en résulte que la série entière $\sum C_{k,n} z^k$ a un rayon de convergence infini et donc φ_n est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini également, cela pour tout n ; en particulier,

$$\boxed{\text{Les } \varphi_n \text{ sont de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

I.4.1. Après simplifications :

$$\boxed{\frac{C_{k,n+1}}{C_{k,n}} = \frac{1}{2k+2n+1}.}$$

I.4.2. Il en découle immédiatement :

$$\boxed{C_{k,n} - (2n+1)C_{k,n+1} = 2kC_{k,n+1}.}$$

I.4.3. Soit $x \neq 0$; à l'aide du résultat précédent et d'une réindexation, j'obtiens

$$\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x}\varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kC_{k,n+1}x^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)C_{k+1,n+1}x^{2k+n+2}.$$

Or

$$2(k+1)C_{k+1,n+1} = \frac{2^{n+2}(k+1+n+1)!}{k!\,\big(2(k+1)+2(n+1)\big)!} = C_{k,n+2},$$

d'où :

$$\boxed{\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x}\varphi_{n+1}(x) = \varphi_{n+2}(x).}$$

I.4.4. Ici :

$$\boxed{u_n = C_{0,n} = 2^n \frac{(2n)!}{n!}.}$$

(Voir la remarque du **I.2.5.***)*

I.5.1. Je reprends l'expression ci-dessus :

$$\varphi_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n} x^{2k}.$$

Pour $x \neq 0$, x^n est non nul et tous les termes de la somme sont strictement positifs, d'où :

$$\boxed{\text{Pour } x \neq 0 \text{ et } n \in \mathbf{N},\ \varphi_n(x) \neq 0.}$$

I.5.2. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]0,1]$; l'expression ci-dessus montre que $\varphi_n(x) > 0$, cela pour tout n. Je déduis alors du **I.4.3.** que

$$\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} > \frac{2n+1}{x} \geq 1$$

d'où :

$$\boxed{\text{Pour } x \in]0,1],\ \gamma_n(x) > 1.}$$

I.5.3. Pour $x \neq 0$, d'après **I.5.1.**, je peux diviser la relation du **I.4.3.** par $\varphi_{n+1}(x)$ et j'obtiens :

$$\boxed{\gamma_n(x) = \frac{2n+1}{x} + \frac{1}{\gamma_{n+1}(x)}.}$$

PARTIE II

II.1. Par définition, $q_0 = 1 \geq 0$ et a_1, a_2 sont dans $\mathbf{N}^*$, donc $q_1 = a_1 \geq 1$ et $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq 2$; alors, si je suppose $n \geq 3$ tel que $q_k \geq k$, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, j'obtiens

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} \geq 1 \cdot (n-1) + (n-2) \geq n \quad \text{car } n \geq 3.$$

J'ai ainsi prouvé, par récurrence forte, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad q_n \geq n.}$$

II.2.1. Pour $n = 1$, $p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + 1) - a_1 a_0 = 1$ et, pour $n \geq 2$:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-1} - (a_n q_n + q_{n-2})\, p_{n-1} = -\left(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}\right).$$

Par conséquent et par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}.}$$

II.2.2. Ici, pour $n \geq 2$:

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-2} - (a_n q_n + q_{n-2})\, p_{n-2} = a_n \left(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}\right).$$

Soit, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n.}$$

II.3.1. Grâce au **II.2.**, il vient immédiatement, par réduction au même dénominateur :

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 1,\ x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \text{ et, pour } n \geq 2,\ x_n - x_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}.}$$

II.3.2. Je viens de voir que $x_n - x_{n-2}$ est du signe de $(-1)^n$, donc la suite (x_{2n}) est croissante et la suite (x_{2n+1}) est décroissante. De plus, d'après **II.1.**, $q_{n-1} q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x_n - x_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le résultat précédent ; en particulier, la suite $(x_{2n} - x_{2n+1})$ converge vers 0. En conclusion :

$$\boxed{\text{Les suites } (x_{2n})_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont adjacentes.}}$$

II.3.3. Il apparaît plus précisément ci-dessus que la suite (x_{2n}) croît strictement vers α et que (x_{2n+1}) décroît strictement vers α ; j'ai donc :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_{2n} < \alpha < x_{2n+1} \quad \text{d'où} \quad 0 < \alpha - x_{2n} < x_{2n+1} - x_{2n},$$

c'est-à-dire, d'après **II.3.1.**, comme on a supposé $\alpha = \dfrac{c}{d}$,

$$0 < \frac{c q_{2n} - d p_{2n}}{d q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}}.$$

D'où, en multipliant par dq_{2n} (strictement positif!) :

$$\boxed{k_n = cq_{2n} - dp_{2n} \text{ est entier et vérifie } 0 < k_n < \frac{d}{q_{2n+1}}.}$$

Il en résulte que $\dfrac{d}{q_{2n+1}} > 1$ pour tout n, ce qui contredit le **II.1.**, d étant fixé. En conclusion,

$$\boxed{\alpha \text{ n'est pas rationnel.}}$$

II.4.1. Le graphe demandé est un morceau de parabole... $f(-1) = f(\lambda + 1) = \lambda > 0$ et f atteint son minimum en $\lambda/2$, milieu du segment $[-1, \lambda + 1]$, ce minimum $-\lambda^2/4 - 1$ étant strictement négatif.

II.4.2. Aux remarques précédentes, j'ajoute que $f(0) = f(\lambda) = -1 < 0$; il en résulte que

$$-1 < r_1 < 0 \quad \text{et} \quad \lambda < r_2 < \lambda + 1.$$

En particulier, puisque λ est entier :

$$\boxed{r_1 < 0\,;\, r_2 > 0\,;\, E(r_1) = -1\,;\, E(r_2) = \lambda.}$$

II.5.1. Il vient, par définition des suites (p_n) et (q_n) :

n	0	1	2	3
p_n	λ	$\lambda^2 + 1$	$\lambda^3 + 2\lambda$	$\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1$
q_n	1	λ	$\lambda^2 + 1$	$\lambda^3 + 2\lambda$

II.5.2. Comme la suite (a_n) est constante, une récurrence forte et néanmoins immédiate fournit

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad q_n = p_{n-1} \quad \text{et donc } \forall n \in \mathbf{N} \quad x_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}.}$$

II.5.3. La suite (q_n) est définie par $q_0 = 1, q_1 = \lambda = r_1 + r_2$ et la relation de récurrence linéaire double

$$\forall n \geq 2 \quad q_n = \lambda q_{n-1} + q_{n-2},$$

dont l'équation caractéristique n'est autre que $f(x) = 0$. q_n est donc de la forme $A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$, où les scalaires A_1, A_2 sont déterminés par

$$\begin{cases} q_0 = A_1 + A_2 = 1 \\ q_1 = A_1 r_1 + A_2 r_2 = r_1 + r_2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A_1 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{r_2}{r_2 - r_1},$$

soit finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad q_n = \frac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2 - r_1}.}$$

II.5.4. En vertu des deux questions précédentes :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n = \frac{r_2^{n+2} - r_1^{n+2}}{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}.}$$

II.5.5. Puisque $|r_1| < 1$ et $r_2 > 1$, il en résulte :

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = r_2.}$$

II.5.6. Ici, $q_0 = 1, q_1 = 3$ et : $\forall n \geq 2 \quad q_n = 3q_{n-1} + q_{n-2}$, d'où les valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6
q_n	1	3	10	33	109	360	1 189

J'ai $\dfrac{1}{q_4 q_5} < 10^{-4}$, or d'après **II.3.** $x_4 = \dfrac{q_5}{q_4} < \alpha < x_5 = \dfrac{q_6}{q_5}$ et $x_5 - x_4 = \dfrac{1}{q_4 q_5}$, d'où

$$\boxed{\frac{360}{109} < \alpha < \frac{1\,189}{360}.}$$

N.B. Je constate que $\dfrac{360}{109} \approx 3,30275$, $\dfrac{1\,189}{360} \approx 3,30278$ et $\alpha = r_2 = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3,30278$.

PARTIE III

III.1.1. En appliquant la définition :

$$\boxed{[a_0,a_1]=\frac{a_0a_1+1}{a_1}=\frac{p_1}{q_1}\quad\text{et}\quad[a_0,a_1,a_2]=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{p_2}{q_2}.}$$

III.1.2. On suppose ici $[a_0,\ldots,a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$, où $p_{n-1},p_{n-2},q_{n-1},q_{n-2}$ ne dépendent que de $a_0,\ldots,a_{n-1}$; remplacer a_n par $a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}$ conduira donc à

$$\left[a_0,\ldots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]=\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}\left(a_np_{n-1}+p_{n-2}\right)+p_{n-1}}{a_{n+1}\left(a_nq_{n-1}+q_{n-2}\right)+q_{n-1}},$$

soit, par définition des suites (p_n) et (q_n) :

$$\boxed{\text{Si }[a_0,\ldots,a_n]=\frac{p_n}{q_n},\text{ alors }\left[a_0,\ldots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.}$$

III.1.3. Les deux questions précédentes constituent la preuve — par récurrence sur n — que

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N}\quad[a_0,\ldots,a_n]=\frac{p_n}{q_n}=x_n.}$$

III.1.4. Je montre là encore le résultat par récurrence : soit T l'ensemble des suites $b=(b_n)$ de réels telles que, pour tout $n\geq 1$, $b_n>0$; je définis, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, le prédicat :

$$\mathcal{P}_n\ :\ \text{“ }\forall b\in T\quad[b_0,\ldots,b_n]=b_0+\frac{1}{[b_1,\ldots,b_n]}\text{ ”}.$$

$\mathcal{P}_1$ est vrai, puisque j'ai bien par définition, pour tout b de T :

$$[b_0,b_1]=b_0+\frac{1}{b_1}=b_0+\frac{1}{[b_1]}.$$

Je suppose alors $n\geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vrai et je considre $b\in T$; j'ai, grâce à $\mathcal{P}_n$ appliqu la suite de T obtenue partir de b en remplaant b_n par $b_n+\dfrac{1}{b_{n+1}}$

$$[b_0,\ldots,b_n,b_{n+1}]=\left[b_0,\ldots,b_{n-1},b_n+\frac{1}{b_{n+1}}\right]=b_0+\frac{1}{\left[b_1,\ldots,b_n+\frac{1}{b_{n+1}}\right]}=b_0+\frac{1}{[b_1,\ldots,b_{n+1}]}\ ;$$

ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai, ce qui achève la preuve. Donc, en particulier pour une suite a de S :

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N}^*\quad[a_0,\ldots,a_n]=a_0+\frac{1}{[a_1,\ldots,a_n]}.}$$

III.2.1. D'après **II.**, $x_0=a_0<\alpha<x_1=a_0+\dfrac{1}{a_1}$, or $a_1\geq 1$, donc $a_0\in\mathbf{Z}$ et $a_0\leq\alpha<a_0+1$:

$$\boxed{x_0<\alpha<x_1\quad\text{et}\quad a_0=E(\alpha).}$$

III.2.2. D'après les résultats du **III.1.**,

$$\forall n\in\mathbf{N}^*\quad x_n=[a_0,\ldots,a_n]=a_0+\frac{1}{[a_1,\ldots,a_n]},$$

d'où, par unicité de la limite, pour n tendant vers l'infini : $\alpha=a_0+\dfrac{1}{\alpha_1}$. En appliquant, pour k fixé dans $\mathbf{N}$, ce même résultat à la suite $(a_{k+n})_{n\in\mathbf{N}}$, qui est aussi dans S, j'obtiens :

$$\boxed{\forall k\in\mathbf{N}\quad\alpha_k=a_k+\frac{1}{\alpha_{k+1}}.}$$

III.2.3. J'en déduis comme au **III.2.1.** que $a_k = E(\alpha_k)$ pour tout k. Ainsi, à partir de la valeur de α, la suite (a_n) se construit par récurrence, parallèlement à la suite (α_n), grâce aux relations suivantes :

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha\ ,\ a_0 = E(\alpha) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}\ ,\ a_{k+1} = E(\alpha_{k+1}).}$$

Cela montre, pour α donné, l'unicité de la suite a telle $\alpha = F(a)$ (dont on a admis l'existence). Par conséquent :

$$\boxed{F \text{ est bijective.}}$$

III.3.1. Reprenant les notations du **I.5.**, avec $x = \dfrac{1}{\mu}$, je pose :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \alpha_k = \gamma_k\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

et, d'après les résultats du **I.3.** et du **I.5.**, j'ai :

$$\alpha_0 = \frac{1}{\text{th}(1/\mu)} \quad ; \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \alpha_n > 1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = (2n+1)\mu + \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

Soit alors la suite $a = \big((2n+1)\mu\big)_{n\in\mathbf{N}}$. D'aprs **II.3.** et **III.1.**, la suite de terme gnral $x_n = [a_0, \ldots, a_n]$ converge vers le nombre irrationnel $\alpha = F(a)$.
Pour montrer que α n'est autre que α_0, j'établis d'abord par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \alpha_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]\,.$$

Ayant : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$, j'ai bien, pour $n = 1$, $\alpha_0 = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1} = [a_0, \alpha_1]$; de plus, si je suppose $n \geq 1$ tel que $\alpha_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]$, j'en déduis, d'après les définitions du début du **III.** :

$$\alpha_0 = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]\,,$$

ce qui achève la preuve. J'en déduis, en notant (p_n) et (q_n) les suites associées à a comme au **II.**, et par le même raisonnement qu'au **III.1.2.**, que

$$\forall n \geq 2 \quad \alpha_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Il vient alors, tous calculs faits :

$$\forall n \geq 2 \quad \alpha_0 - x_n = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{(\alpha_n - a_n)\,(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})}{(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2})\,(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}.$$

Or les q_k sont dans $\mathbf{N}^*$, a_n et α_n sont au moins égaux à 1, $\alpha_n - a_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1}} \in \,]0,1[$ et, d'après les résultats du **II.**, $|p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}| = 1$ et $q_{n-1} + q_{n-2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où

$$\forall n \geq 2 \quad |\alpha_0 - x_n| \leq \frac{1}{(q_{n-1} + q_{n-2})^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte, par unicité de la limite de la suite (x_n), que $\alpha_0 = \alpha = F(a)$ d'où finalement

$$\boxed{a = \big((2n+1)\mu\big)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est la suite de } S \text{ telle que } F(a) = \frac{1}{\text{th}(1/\mu)}.}$$

III.3.2. J'applique les définitions :

n	0	1	2	3	4
a_n	1	3	5	7	9
p_n	1	4	21	151	1 380
q_n	1	3	16	115	1 051

De même qu'au **II.5.6.**, comme $\dfrac{1}{q_3 q_4} < 10^{-4}$, l'encadrement $x_4 < \alpha < x_3$ convient :

$$\boxed{\frac{1\,380}{1\,051} < \frac{1}{th(1)} < \frac{151}{115}.}$$

N.B. Ces trois nombres admettent pour valeur approchée arrondie à 10^{-5} près $1,31304$.