CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE MATH 2 PSI 2000

courbes de Bézier

Les figures sont laissées au bon soin des lecteurs.

1 PARTIE

1. On a $B_F(t) = (1-t)P_0 + tP_1$. Le point courant est donc un barycentre de P_0 et P_1 . On peut aussi écrire

$$B_F(t) = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1}\ ,\ t \in [0,1]$$

$$\boxed{\text{La trajectoire de l'arc est donc le segment } [P_0, P_1]}$$

2. On peut remarquer que pour $t = 1/2$, $B_{n\{P_0\cdots P_n\}}(1/2)$ est le milieu de $B_{n-1,\{P_0\cdots P_{n-1}\}}(1/2)$ et de $B_{n-1,\{P_1\cdots P_n\}}(1/2)$ En particulier $Q_0 = B(1/2)$, $Q_1 = B_{1\{P1,P_2\}}(1/2)$.On vérifie bien que :

$$\boxed{B_F(1/2) \text{ est le milieu de } Q_0, Q_1}$$

De façon évidente :

$$\boxed{B_F(0) = P_0, BF(1) = P_2}$$

On a $B_{1\{P_0,P_1\}}(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ et $B_1(P_1,P_2)(t) = (1-t)P_1 + tP_2$ On a donc :

$$\boxed{B_F(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2}$$

On vérifie que la somme de coefficients est 1 : $(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1$
Par dérivation de la formule $B_F(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$qui est une fonction C^∞ sur $[0,1]$ $B"_F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
L'accélération est constante . La trajectoire est donc un arc de parabole (grand classique de physique).
On peut refaire le calcul dans le repère $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sachant $B"(t) = 2\sqrt{2}u, B(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v), B(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$,

$$B(t) = \left(\sqrt{2}t^2 - \sqrt{2}t + 1/\sqrt{2}\right)u + \left(\sqrt{2}t - 1/\sqrt{2}\right)v$$

Soit $X = \frac{2Y^2+1}{2\sqrt{2}}$. En particulier l'axe de la parabole est (O,u) et le sommet est en $X = 1/\left(2\sqrt{2}\right)$ .C'est le point $B_{2,F}(1/2)$
On peut donc tracer la trajectoire sachant que c'est un arc de parabole d'extrémités P_0 et P_1 et passant par $B_F(1/2) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. Une étude un peu plus précise donne la tangente aux extrémités (cf Partie 4)

2 PARTIE

1. On peut remarquer que la définition d'un convexe est équivalente à :

$$\forall (M,N) \in \mathbb{K}\ ,\ [M,N] \subset \mathbb{K}$$

- **1**:Si la partie non vide vérifie :

$$n \in \mathbb{N}^*, \forall (M_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \forall (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{+n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \in \mathbb{K}$$

alors en prenant $n = 2$, $M_1 = M, M_2 = N$ et $\lambda_1 = \lambda$ on retrouve la définition du convexe.

- La réciproque se démontre par récurrence:On note H_n la proposition:

$$n \in \mathbb{N}^*, \forall (M_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \forall (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{+n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \in \mathbb{K}$$

- si $n=1$ on a $M\in\mathbb{K}\Rightarrow M\in\mathbb{K}$: évident
- pour $n=2$ on a la définition d'un convexe, donc la propriété H_2 est encore vraie.
- on supposeH_k vraie tout $1\leq k<n$. Soit alors n points M_i de $\mathbb{K}$ et n scalaires positifs λ_i de somme 1.
  On isole M_n et on écrit si $\lambda_n\neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_iM_i=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}M_i\right)+\lambda_nM_n$$

  Or le point $P_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}M_i$ est dans $\mathbb{K}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $\sum_{i=1}^{n}\lambda_iM_i=(1-\lambda_n)\,P_n+\lambda_nM_n$ est dans $\mathbb{K}$ par définition de $\mathbb{K}$.
  Si $\lambda_n=1$ alors $\sum\lambda_iM_i=M_n$ et le résultat est évident.

- **2:**Notons $(\mathbb{K}_w)_{w\in W}$ la famille de convexes contenant E et $\mathbb{K}=\cap_{w\in W}\mathbb{K}_w$
  - E étant non vide , l'intersection de parties contenant E est non vide. Donc $\mathbb{K}$ contient E et est non vide.
  - Si M et N sont deux points de $\mathbb{K}$, les deux points sont dans tous les $\mathbb{K}_w$ qui sont convexes. le segment $[M,N]$ est donc inclus dans tous les $\mathbb{K}_w$ donc dans leur intersection.

$$\boxed{\text{L'intersection de convexes contenant } E \text{ est un convexe contenant } E}$$

- **3:**
  - D'après la propriété précédente l'enveloppe convexe, qui est l'intersection de tous les convexes contenant E, est un convexe donc : $E=C(E)\Rightarrow E$ convexe
  - Réciproquement si E est un convexe $C(E)$ est l'intersection de E avec d'autres convexes donc $C(E)\subset E$. De plus par l'intersection des convexes contenant E contient E donc $E\subset C(E)$ .Par double inclusion on a $C(E)=E$

$$\boxed{C(E)=E\Leftrightarrow E \text{ est convexe}}$$

- **4:**Si H contient G ,$C(H)$ est un convexe contenant G (car $C(H)$ contient H) . Donc $C(H)$ contient le plus petit convexe contenant G soit $C(G)$.

$$\boxed{G\subset H\Rightarrow C(G)\subset C(H)}$$

- **5:**Soit $K(E)=\left\{M\in\mathbb{R}^2,\exists n\in\mathbb{N}^*,\exists\,(M_i)_{i=1}^n\in E^n,\exists\,(\lambda_i)\in\mathbb{R}^{+n},\sum_{i=1}^n\lambda_i=1 \text{ et } M=\sum_{i=1}^n\lambda_iM_i\right\}$
  - On a $K(E)\subset C(E)$:En effet les points M_i sont dans E donc dans $C(E)$. Or $C(E)$ est convexe d'après $II12$ donc $C(E)$ contient M d'après $II11$
  - On a $C(E)\subset K(E)$: Pour cela montrons que $K(E)$ est un convexe contenant E . Il contiendra alors le plus petit:
    * Si $M\in E$ alors $M\in K(E)$:prendre $n=1,\lambda_1=1,M_1=M$
    * Si M est N sont dans $K(E)$ on a par construction : $M=\sum_{k=1}^n\lambda_kM_k$ et $N=\sum_{l=1}^{nn}\mu_lN_l$.Pour montrer que $K(E)$ est convexe, on revient à la définition en montrant que

$$(1-\lambda)M+\lambda N\in K(E)$$

      Or

$$(1-\lambda)M+\lambda N=\sum_{k=1}^{n}(1-\lambda)\lambda_kM_k+\sum_{l=1}^{nn}\lambda\mu_lN_l$$

      Ce point est le barycentre de $n+nn$ points de E affectés de coefficients positifs $(0\leq\lambda\leq1,\lambda_k\geq0,\mu_l\geq0)$ de somme $\sum_{k=1}^n(1-\lambda)\lambda_k+\sum_{l=1}^{nn}\lambda\mu_l=(1-\lambda)+\lambda=1$. Le point $(1-\lambda)M+\lambda N$ est dans $K(E)$. On a bien vérifié que $K(E)$ es convexe:

$$\boxed{C(E)=\left\{M\in\mathbb{R}^2,\exists n\in\mathbb{N}^*,\exists\,(M_i)_{i=1}^n\in E^n,\exists\,(\lambda_i)\in\mathbb{R}^{+n},\sum_{i=1}^n\lambda_i=1 \text{ et } M=\sum_{i=1}^n\lambda_iM_i\right\}}$$

- **6:**On montre par récurrence H_n : pour tout famille F de cardinal $n+1$ $\forall t\in[0,1]$, $B_{n,F}(t)\in C(E)$
  - pour $n=0$ $B_{n,F}(t)=P_0$ et $C(P_0)=P_0$
  - On suppose H_k vraie pour $0\leq k<n$ .On a par définition:

$$B_{n,F}(t)=(1-t)B_{n-1,\{P_0\cdots P_{n-1}\}(t)}+tB_{n-1,\{P_1\cdots P_n\}}(t)$$

  D'après l'hypothèse de récurrence $B_{n-1,\{P_0\cdots P_{n-1}\}(t)}\in C(P_0\cdots P_{n-1})$.
  Or d'après II14:$(P_0\cdots P_{n-1})\subset F\Rightarrow C(P_0\cdots P_{n-1}).\subset C(F)$ donc $\mathrm{B}_{n-1,\{P_0\cdots P_{n-1}\}(t)}\in C(F)$
  De même : $B_{n-1,\{P_1\cdots P_n\}}(t)\in C(F)$. Comme $C(F)$ est convexe, on peut appliquer à ces deux points la définition d'un convexe: $B_{n,F}(t)\in C(F)$

2. ϕ est une application affine du plan si et seulement si il existe une application linéaire f telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = f(\overrightarrow{AB})$$

Ou encore $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2, \phi(B) = \phi(A) + f(\overrightarrow{AB})$

Vérifions par récurrence H_n : pour tout famille F de cardinal $n+1$ on a $\phi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\phi(F)}(t)$:

- pour $n = 0$ tous les ensembles sont réduits à un point et le résultat est évident.
- Si la propriété est vraie pour tout $k < n$ on peut dire que :

$$\phi(B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)) = B_{n-1,\{\phi(P_0)\cdots\phi(P_{n-1})\}}(t)$$

et

$$\phi(B_{n-1,\{P_1,\cdots P_n\}}(t)) = B_{n-1,\{\phi(P_1)\cdots\phi(P_n)\}}(t)$$

On a par construction:

$$B_{n,F}(t) = (1-t)B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t) + tB_{n-1,\{P_1,\cdots P_n\}}(t)$$

En prenant $A = B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}$ et $B = B_{n,F}(t)$ on a donc :

$$\begin{aligned}
\phi(B_{n,F}(t)) &= \phi(B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)) + f\left(t\overrightarrow{B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)B_{n-1,\{P_1,\cdots P_n\}}(t)}\right) \\
&= \phi(B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)) + tf\left(\overrightarrow{B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)B_{n-1,\{P_1,\cdots P_n\}}(t)}\right) \text{ (linéarité)} \\
&= \phi(B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)) + t\left(\phi(B_{n-1,\{P_1,\cdots P_n\}}(t)) - \phi(B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t))\right) \\
&= (1-t)\phi(B_{n-1,\{P_0,\cdots P_{n-1}\}}(t)) + t\phi(B_{n-1,\{P_1,\cdots P_n\}}(t)) \\
&= (1-t)B_{n-1,\{\phi(P_0)\cdots\phi(P_{n-1})\}}(t) + tB_{n-1,\{\phi(P_1)\cdots\phi(P_n)\}}(t) = B_{n,\phi(F)}(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\phi(F)}(t)}$$

- *Remarque : on peut aussi séparer le problème en deux en disant que tout application affine est le composé d'une application linéaire et d'une translation . En montrant la propriété si ϕ est linéaire , puis si ϕ est une translation on peut alors conclure.*

3. Si P_0, P_1, P_2 est un triangle non aplati , il existe une transformation affine qui envoie le triangle de la question I2.4 sur ce triangle.$M = xi + yj \to P_0 + x\overrightarrow{P_0P_1} + y\overrightarrow{P_0P_2}$.

La courbe de Bézier associé est donc l'image par cette transformation de l'arc de parabole. C'est donc un arc de parabole .

3 PARTIE

1. - **1:**On veut montrer par récurrence H_n :

$$\exists \left(b_{n,k}\right)_{k=0}^{n}, \forall \left(P_k\right)_{k=0}^{n}, \forall t \in [0,1], B_{n,F}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t)P_k$$

on notera que les coefficients $b_{n,k}$ doivent être indépendant des (P_k)

  - pour $n = 0$: $\forall t \in [0,1]$ $B_{0,P}(t) = P$ donc $b_{0,0} = 1$ convient et est l'unique solution.
  - Si la famille $(b_{m;k})$ existe pour tout $m < n$ alors on a :

$$\begin{aligned}
B_{n-1,\{P_0\cdots P_{n-1}\}}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(t)P_k \\
B_{n-1\{P_1\cdots P_n\}}(t) &= \sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k-1}(t)P_k
\end{aligned}$$

donc par définition de $B_{n,\{P_0\cdots P_n\}}(t)$:

$$\begin{aligned}
B_{n,F}(t) &= (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(t)P_k + t\sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k-1}(t)P_k \\
&= (1-t)b_{n-1,0}(t)P_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left((1-t)\,b_{n-1,k}(t) + tb_{n-1,k-1}\quad\right)P_k + tb_{n-1,k-1}(t)P_n
\end{aligned}$$

on a donc :

$$\boxed{\begin{cases} b_{n,0}(t) = (1-t)b_{n-1,0}(t) \\ \forall k \in [[1..n-1]], b_{n,k}(t) = (1-t)\, b_{n-1,k}(t) + t b_{n-1,k-1} \\ b_{n,n}(t) = t b_{n-1,n-1}(t) \end{cases}}$$

D'où l'existence des coefficients définis par ces relations de récurrences.
On vérifie alors par récurrence que les coefficients sont des polynômes de degré $\leq n$.

– Par prudence on vérifie les formules pour $n = 1$ et $n = 2$ à l'aide du I :

$$b_{1,0} = (1-t) \times 1 = (1-t), b_{1,1} = t \times 1 = t$$

$$b_{2,0} = (1-t)(1-t) = (1-t)^2, b_{2,1} = t(1-t) + (1-t)t = 2t(1-t), b_{2,2} = t \times t = t^2$$

- **2:**On peut continuer à appliquer la récurrence :

$$b_{3,0} = (1-t)b_{2,0} = (1-t)^3, b_{3,1} = (1-t)b_{2,1} + t b_{2,0} = 3t(1-t)^2$$
$$b_{3,2} = (1-t)b_{2,2} + t b_{2,1} = 3t^2(1-t), b_{3,3} = t b_{2,2} = t^3$$

- **3:**On doit commencer à voir sortir la récurrence . Sinon on calcule pour $n = 4$:

$$b_{4,0} = (1-t)^4, b_{4,1} = 4t(1-t)^3, b_{4,2} = 6t^2(1-t)^2, b_{4,3} = 4t^3(1-t), b_{4,4} = t^4$$

On doit deviner assez vite $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0,n]], b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$
La formule se vérifie par récurrence sur n en prenant : $H_n : \forall k \in [[0,n]], b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$:

– pour $n = 0 \cdots 4$ la formule est vérifiée
– Si elle est vraie pour tout $m < n$ on a :

$$\begin{cases} b_{n,0}(t) = (1-t)b_{n-1,0}(t) = (1-t)(1-t)^{n-1} = (1-t)^n \\ \forall k \in [[1..n-1]], b_{n,k}(t) = (1-t)\, b_{n-1,k}(t) + t b_{n-1,k-1} \\ \qquad = \left(C_{n-1k}^k + C_{n-1}^{k-1}\right) t^k (1-t)^{n-k} \\ \qquad = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \text{ (Formule de pascal)} \\ b_{n,n}(t) = t b_{n-1,n-1}(t) = t \times t^{n-1} = t^n \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0,n]], b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}}$$

- **4)** On remarque avec le binôme de Newton: $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(t) = (1-t+t)^n = 1$ donc en intégrant :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n I_{n,k} = 1}$$

Il n'y a pas de problèmes théoriques , la somme admet un nombre fini de terme et les fonctions sont continues, donc intégrables sur un segment .

- **5)** On a $I_{n,k} = C_n^k \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} dt$. On peut intégrer par partie en posant $u(t) = t^k$ et $v(t) = -\frac{(1-t)^{n-k+1}}{n-k+1}$ qui sont bien deux fonctions C_1 sur $[0,1]$:

$$I_{n,k} = C_n^k \frac{k}{(n-k+1)} \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k+1} dt = C_n^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k+1} dt = I_{k-1}$$

toutes les intégrales sont égales quand k décrit $[[0,n]]$. Comme leur somme vaut 1:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0,n]], I_{n,k} = \frac{1}{n+1}}$$

2. On a :

$$B_{n,\widetilde{F}}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} P_{n-k} = \sum_{l=0}^n C_n^{n-l} t^{n-l} (1-t)^l P_l \text{ avec le changement } l = n-k$$

et donc comme $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$\boxed{B_{n,\widetilde{F}}(t) = B_{n,F}(1-t)}$$

les deux trajectoires sont les mêmes . Seul change le sens de parcours.

4 PARTIE

1.

- **1:**Le sujet demande ensuite de retrouver le $III1.3$. Il ne faut donc pas utiliser l'expression de $b_{n,k}$ pour calculer Z.
  - pour $i=0$ $C_{0,j}(t)=B_{0,\{P_j\}}(t)=P_j=\psi_t(S^j)$
  - pour $i=1$:$C_{1,j}(t)=B_{1,\{P_j,P_{j+1}\}}(t)=(1-t)P_j+tP_{j+1}=\psi_t\left((1-T)S^j+TS^{j+1}\right)=\psi_t((1-T+TS)S^j)$ donc si Z existe $Z=1-T+TS$
  - pour $i=2$: $C_{2,j}(t)=(1-t)^2P_j+2t(1-t)P_{j+1}+t^2P_{j+2}$ d'après I2 et donc :

$$C_{2,j}(t)=\psi_t((1-T)^2S^j+2T(1-T)S^{j+1}+T^2S^{j+2})=\psi_t\left(\left((1-T)^2+2TS(1-T)+T^2S^2\right)S^j\right)$$

    le coefficient de S^j est bien $(1-T+TS)^2$
  - On pose donc l'hypothèse de récurrence : $H_i:\forall j\in[0..n-i],C_{i,j}(t)=\psi_t(Z^iS^j)$
    * elle est vérifiée pour $i=0,1,2$
    * Si elle est vraie pour $i-1$ on a :

$$C_{i-1,j}(t)=\psi_t(Z^{i-1}S^j)\text{ et }C_{i-1,j+1}(t)=\psi_t(Z^{i-1}S^{j+1})$$

    Donc d'après la récurrence définissant les courbes de Bézier:

$$\begin{aligned}C_{i,j}(t)=B_{i,\{P_i\cdots P_{i+j}\}}(t)&=(1-t)B_{i-1,\{P_i\cdots P_{i+j-1}\}}(t)+tB_{i-1,\{P_{i+1}\cdots P_{i+j}\}}(t)\\&=(1-t)C_{i-1,j}(t)+tC_{i-1,j+1}(t)=(1-t)\psi_t(Z^{i-1}S^j)+t\psi_t(Z^{i+1}S^{j+1})\\=\psi_t\left((1-T)Z^{i-1}S^j+TZ^{i-1}S^{j+1}\right)&=\psi_t\left((1-T+TS)Z^{i-1}S^j\right)=\psi_t(Z^iS^j)\end{aligned}$$

$$\boxed{Z=(1-T+TS)}$$

  - Remarque:On utilise plusieurs fois que si P est un polynôme de la seule variable T alors pour tout polynôme Q on a : $\psi_t(PQ)=P(t)\psi_t(Q)$. La vérification se fait pour une base ce qui suffit par linéarité:
    * si $P=T^a$ et $Q=T^\alpha S^\beta$ on a alors : $\psi_t(PQ)=\psi_t(T^{a+\alpha}S^\beta)=t^{a+\alpha}P_\beta=t^a(t^\alpha P_\beta)=t^a\psi_t(Q)$.
- **2:**En particulier pour $i=0$ et $j=n$:

$$B_{n,F}(t)=C_{0,n}(t)=\psi_t\left((1-T+TS)^n\right)=\psi_t\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kT^k(1-T)^{n-k}S^k\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^kt^k(1-t)^{n-k}P_k\text{ . On retrouve }b_{n,k}=C_n^kt^k(1-t)^{n-k}$$

- **3:** comme $B_{n,F}(t)=\sum_{k=0}^nC_n^kt^k(1-t)^{n-k}P_k$, $\boxed{B_{n,F}(0)=P_0\ ,\ B_{n,F}(1)=P_n}$
- **4:**ψ_t et la dérivation étant linéaire la relation est vérifiée pour tout polynôme W si et seulement si elle est vérifiée sur une base . Or

$$\frac{d}{dt}\psi_t(T^iS^j)=\frac{d}{dt}\left(t^iP_j\right)=it^{i-1}P_j\text{ si }i>0$$

$$\psi_t(\frac{\partial T^iS^j}{\partial T})=\psi_t(iT^{i-1}S^j)=it^{i-1}P_j$$

  d'où l'égalité si $i\neq0$. Si $i=0$ on a deux expressions nulles.

$$\boxed{\forall W\in V,\frac{d}{dt}\left(\psi_tW\right))=\psi_t\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)}$$

- **5:**D'après cette règle de dérivation on a comme :$\frac{\partial Z}{\partial T}=\frac{\partial(1-T+TS)}{\partial T}=S-1$

$$\frac{d}{dt}B_{n,F}(t)=\frac{d}{dt}\psi_t\left(Z^n\right)=\psi_t\left(\frac{\partial\left(Z^n\right)}{\partial T}\right)=\psi_t\left(nZ^{n-1}S-nZ^{n-1}\right)=n\left(C_{n-1,1}(t)-C_{n-1,O}(t)\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}B_{n,F}(t)=n\left(C_{n-1,1}(t)-C_{n-1,0}(t)\right)}$$

- **6:**Si $t=0$ on sait que $B_{n,\{P_0\cdots P_n\}}(0)=P_0$, et donc :

$$\frac{d}{dt}B_{n,F}(0)=n\left(C_{n-1,1}(0)-C_{n-1,0}(0)\right)=n\left(P_1-P_0\right)=n\overrightarrow{P_0P_1}$$

  . La tangente au point de paramètre $t=0$ à la courbe est la droite P_0P_1 .
  A cause de la symétrie démontrée à la question III2.2 ,La tangente au point de paramètre $t=1$ à la courbe est la droite $P_{n-1}P_n$.

- *Remarque : on peut trouver aussi le résultat en dérivant la formule du III avec les* $b_{n,k}$
- Remarque:*Retour sur la parabole du I2 : on a les tangentes au points de paramètres* 0 et 1 .*Le calcul précédent donne aussi que la tangente au point de paramètre* $1/2$ *est la droite* Q_0Q_1.
- **7:** on a $Z = 1 - T + ST$ qui est une fonction affine de T de dérivée $(S-1)$ on a donc :

$$\frac{\partial^k (Z^n)}{\partial T^k} = \frac{n!}{(n-k)!}(S-1)^k Z^{n-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq n$$

  Par dérivation successive on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dt^k} B_{n,F}(t) &= \frac{n!}{(n-k)!}\psi_t\left((S-1)^k Z^{n-k}\right) = \psi_t\left(\frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^{k-j} Z^{n-k} S^j\right) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^{k-j} C_{n-k,j}(t)\end{aligned}$$

  En particulier

$$\boxed{\frac{d^k}{dt^k} B_{n,F}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^{k-j} P_j}$$

  Ce vecteur ne dépend que des points $P_0 \cdots P_k$.
- En particulier $\frac{d^2}{dt^2} B_{n,F}(0) = \overrightarrow{P_1P_0} - \overrightarrow{P_2P_1}$

2. On remarque que par symétrie S par rapport à O P_0 et P_3 sont échangés ainsi que P_1 et P_2 . D'autre par la symétrie est une application affine donc :

$$B_{3,F}(t) = B_{3,\widetilde{F}}(1-t) = B_{3,S(F)}(1-t) = S\left(B_{3,F}(1-t)\right)$$

   les points de paramètre t et $1-t$ s'échangent par la symétrie.

   Les tangentes aux points P_0 et P_3 sont connus . Ce sont les droites P_0P_1 et P_2P_3.

   par symétrie $B_{3,F}(1/2) = O$.La tangente en ce point admet le vecteur directeur (s'il est non nul)

$$\frac{d}{dt} B_{n,F}(t) = 3\left(C_{2,1}(1/2) - C_{2,0}(1/2)\right) = 3\left(B_{3,\{P_0,P_1,P_2\}}(1/2) - B_{3,\{P_1,P_2P_3\}}\right)$$

   donc si $C_{2,1}(1/2) \neq C_{2,0}(1/2)$, ces deux points définissent la tangente en O à la courbe . Or on a vu en I2 comment les construire par milieux successifs. Or le milieu de P_1P_2 est O .La tangente en O est donc la droite qui joint les milieu de P_0P_1 et P_2P_3 .

   On peut faire une étude plus classique en étudiant la courbe paramétrée:$\begin{cases} x(t) = (t-1)^3 + t^3 \\ y(t) = 6t^2(1-t) + 6t(1-t)^2 \end{cases}$

5 PARTIE:

1. On notera que les points variables sont les points $(P_k)_{k=0}^n$. Le sujet pose donc $P_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$

   Par contre les points M_i et les paramètres t_i sont des constantes .

   On a $B_{n,F}(t_k) = \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k)P_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k)x_i \\ \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k)y_i \end{pmatrix}$. Donc

$$f(x_0 \cdots y_n) = \sum_{k=1}^{q}\left(\alpha_k - \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k)x_i\right)^2 + \left(\beta_k - \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k)y_i\right)^2$$

   C'est un polynôme par rapport aux variables x_i et y_i .$\boxed{\gamma \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{2n+2}}$

2. On a donc avec les notations du $V3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X,Y) = \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k)\left(\alpha_k - b_{n,j}(t_k)\sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k)x_i\right)$$

   et de même

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(X,Y) = \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k)\left(\beta_k - b_{n,j}(t_k)\sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k)y_i\right)$$

3. On sait que si une fonction f C^1 sur un ouvert U présente un minimum local en un point de U alors ce point est un point critique où les vecteurs dérivées sont tous nuls . Donc ici :

$$\forall j \in [0..n] \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k) \left(\alpha_k - b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k) x_i\right) = 0 \\ \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k) \left(\beta_k - b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k) y_i\right) = 0 \end{array} \right.$$

soit

$$\forall j \in [0..n] \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k) \alpha_k = \sum_{k=1}^{q} b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k) x_i \\ \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k) \beta_k = \sum_{k=1}^{q} b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t_k) y_i \end{array} \right.$$

Les deux systèmes sont indépendants

$$\forall j \in [0..n] \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k) \alpha_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{n,j}(t_k) b_{n,i}(t_k)\right) x_i \\ \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,j}(t_k) \beta_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{n,j}(t_k) b_{n,i}(t_k)\right) x_i \end{array} \right.$$

$$\boxed{A = (a_{i,j}) \text{ avec } a_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{n,i}(t_k) b_{n,j}(t_k)}$$

$$\boxed{U = (u_i) \text{ avec } u_i = \sum_{k=1}^{q} 2b_{n,i}(t_k) \alpha_k}$$