X - ENS - ESPCI

2012 Mathématiques 4h PC

Préliminaire

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||\leq 1} ||Ax||.$$

1.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $x \mapsto Ax$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, espace de dimension finie. Elle est donc continue. Elle est donc bornée sur la boule unité et $\sup_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||\leq 1} ||Ax||$ existe et est un élément de $\mathbb{R}^+$.
- Notons $(e_1, ..., e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il sont tous de norme 1, éléments de la boule unité.

  $$|||A||| = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\},\ ||Ae_i|| = 0 \Rightarrow\ \forall i, Ae_1 = 0$$

  $$|||A||| = 0 \Rightarrow \text{chaque colonne de } A \text{ est nulle} \Rightarrow A = 0.$$

  Réciproque immédiate.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $||x|| \leq 1$:

  $$||(A + B)x|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq |||A|||| + |||B|||$$

  et donc $\sup_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||\leq 1} ||(A + B)x|| \leq |||A||| + |||B|||$.
  c.a.d. $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $||x|| \leq 1$:

  $$||(\lambda A)x|| = |\lambda| \times ||Ax|| \leq |\lambda| \times |||A||| \quad \text{et donc } |||\lambda A||| \leq |\lambda| \times |||A|||$$

  De la même manière, si $\lambda \neq 0$, on obtient avec $A' = \lambda A$ et $\lambda' = 1/\lambda$

  $$|||A||| = |||(1/\lambda)\lambda A||| \leq (1/|\lambda|) \times |||\lambda A|||$$

  Finalement $|||\lambda A||| = |\lambda| \times |||A|||$ (évident si $\lambda = 0$)

$|||\quad|||$ définit bien une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On remarque que $|||I_n||| = 1$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$. Notons $z = \dfrac{1}{||y||}y$. Ce vecteur est de norme 1 et donc

$$||Az|| = \frac{1}{||y||}||Ay|| \leq |||A||| \quad \text{et} \quad ||Ay|| \leq |||A||| \times ||y||$$

(résultat encore vrai si $y = 0$.
Soit alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ avec $||x|| \leq 1$.

$$||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leq |||A||| \times ||Bx|| \leq |||A||| \times |||B|||$$

D'où $|||AB||| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||\leq 1} ||ABx|| \leq |||A||| \times |||B|||$.

Première partie : un exemple en dimension 1

$$(P) \quad \begin{cases} y' = ay\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

3. La fonction $f : y \mapsto ay\left(1-\dfrac{y}{b}\right)$ est une fonction polynôme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 1, le problème (P) admet une unique solution maximale.

4. Soit $y_0 \in]0, b[$.

(a) Remarquons que les fonction constantes $y : t \mapsto 0$ et $y : t \mapsto b$ sont solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Si la solution y s'annulait en un point t de I ce serait d'après le théorème 1 la fonction nulle et on aurait $y(0) = 0$ ce qui n'est pas.
Pour la même raison la fonction y ne peut pas prendre la valeur b sur I. Mais les fonctions y et $y - b$ sont continues sur I et ne s'annulent pas. Elles restent de signe constant donné par la valeur en 0, y_0.
Par suite, pour tout $t \in I$, $y(t) \in]0, b[$.

(b) Notons F la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I, F(t) = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u\left(1-\frac{u}{b}\right)} - at.$$

Cette fonction est bien définie car pour tout $t \in I$, le segment d'extrémité $y_0, y(t)$ est inclus dans $]0, b[$. Elle est dérivable et, par dérivation de fonctions composées :

$$\forall t \in I, F'(t) = \frac{1}{y(t)\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)} y'(t) - a = 0$$

F est constante sur I, $0 \in I$ donc $\forall t \in I$, $F(t) = \int_{y_0}^{y_0} () du - a \times 0 = 0$.
F est nulle sur I ce qui correspond à l'égalité demandée.

(c) $\dfrac{1}{u\left(1-\frac{u}{b}\right)} = \dfrac{\alpha}{u} + \dfrac{\beta}{1-\frac{u}{b}} = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1/b}{1-\frac{u}{b}}$

$$\forall t \in I, \left[\ln|u| - \ln\left|1-\frac{u}{b}\right|\right]_{y_0}^{y(t)} = at$$

Et pour tout $t \in I$, $y(t) \in]0, b[$ d'où :

$$\ln\left(\frac{y(t)}{1-\frac{y(t)}{b}}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{1-\frac{y_0}{b}}\right) + at$$

$$\frac{by(t)}{b-y(t)} = \frac{by_0}{b-y_0} e^{at}$$

Un calcul simple donne, pour tout t de I :

$$y(t) = \frac{Ke^{at}b}{b + Ke^{at}} \quad \text{avec } K = \frac{by_0}{b - y_0} > 0$$

Ceci définit une fonction sur $\mathbb{R}$ qui vérifie le problème (P) et qui est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle. L'intervalle I est donc $\mathbb{R}$.

(d) $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = b$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$.
Comme $y' > 0$ sur $\mathbb{R}$, y est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie : le cas linéaire

$$(L) \quad \begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

On définit $\varphi_A : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\varphi_A(t; Y_0) = Y(t)$ où Y est la solution maximale du problème (L).

5. Soit Y_0, Y_1 deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$. Notons Y et Z les solutions de (L) telle que $Y(0) = Y_0$ et $Z(0) = Y_1$. Pour tout réel α, la fonction $Y + \alpha Z$ vérifie :

$$(Y+\alpha Z)' = Y'+\alpha Z' = AY+\alpha AZ = A(Y+\alpha Z) \quad \text{avec } (Y+\alpha Z)(0) = Y_0+\alpha Y_1.$$

$Y + \alpha Z$ est l'unique solution de (L) qui prend la valeur $Y_0 + \alpha Y_1$ pour $t = 0$. C'est donc la fonction $t \mapsto \varphi_A(t; Y_0 + \alpha Y_1)$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (Y+\alpha Z)(t) = Y(t)+\alpha Z(t) = \varphi_A(t; Y_0)+\alpha\varphi_A(t; Y_1) = \varphi_A(t; Y_0+\alpha Y_1)$$

On vient donc de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y_0 \mapsto \varphi_A(t; Y_0)$ est linéaire.

Étudions le noyau de chacune de ces applications linéaires. Soit t_1 un réel fixé. $\varphi(t_1; Y_0) = 0 \Rightarrow Y(t_1) = 0$ où Y est la solution de (L) qui prend la valeur Y_0 en $t = 0$. Mais comme le système est linéaire, la solution nulle est l'unique solution qui s'annule en un point. Par suite pour tout t, $\varphi(t, Y_0) = 0$ et en particulier $\varphi_A(0, Y_0) = Y(0) = Y_0 = 0$.
L'application $Y_0 \mapsto \varphi_A(t_1, Y_0)$ est injective. Comme c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ elle est bijective. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice inversible, élément de $GL_n(\mathbb{R})$. Notons la $e_A(t_1)$. Elle vérifie :

$$\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_A(t_1; Y_0) = e_A(t_1)Y_0$$

On a donc défini une application $e_A : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall Y_0 \in R^n,\ \varphi_A(t; Y_0) = e_A(t)Y_0.$$

6. (a) Utilisons les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout i, $t \mapsto e_A(t)e_i$ est la solution de (L) qui prend la valeur e_i pour $t = 0$. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Ses fonctions coordonnées sont celles de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $e_A(t)$. Toutes les fonctions coordonnées de e_A sont de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout Y_0 de $\mathbb{R}^n$, tout t de $\mathbb{R}$:

$$Y'(t) = (\varphi_A(t;Y_0))' = (e_A(t)Y_0)' = e_A'(t)Y_0 = A(\varphi_A(t;Y_0)) = Ae_A(t)Y_0$$

Les deux applications linéaires $Y_0 \mapsto e_A'(t)Y_0$ et $Y_0 \mapsto Ae_A(t)Y_0$ sont égales et ont même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e_A'(t) = Ae_A(t).$$

(b) Par définition, $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_A(0;Y_0) = Y_0 = e_A(0)Y_0$. D'où $e_A(0) = I_n$.
Soit alors t_1 un réel fixé, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ et Y la solution de (L) telle que $Y(0) = Y_0$. Pour tout t, $Y(t) = e_A(t)Y_0$. En particulier $Y(t_1) = e_A(t_1)Y_0$.
L'application $Z : s \mapsto Y(s+t_1)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $Z' = AZ$ car, pour tout s, $Z'(s) = Y'(s+t_1) = AY(s+t_1) = AZ(s)$. Comme $Z(0) = Y(t_1)$, cette solution est $s \mapsto \varphi_A(s;Y(t_1)) = e_A(s)Y(t_1)$.
On obtient donc pour Y_0, s, t_1 quelconques :

$$Z(s) = Y(s+t_1) = e_A(s+t_1)Y_0 = e_A(s)Y_1(t) = e_A(s)e_A(t_1)Y_0$$

On a donc :

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \quad e_A(s+t) = e_A(t+s) = e_A(t)e_A(s) = e_A(s)e_A(t).$$

(c) En particulier pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$e_A(t)e_A(-t) = e_A(t-t) = e_A(0) = I_n$ et $e_A(-t) = e_A(t)^{-1}$.

7. (a) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.
Soit Y la solution de (L) telle que $Y(0) = Y_0$.
Par définition $\forall t$, $Y(t) = e_A(t)Y_0$.
Notons $Z = P^{-1}Y$; on a $Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APZ$. De plus $Z(0) = P^{-1}Y_0$. Z est solution du problème (L') : $Z' = P^{-1}APZ$ et $Z(0) = P^{-1}Y_0$. On a donc par définition :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e_{P^1AP}(t)P^{-1}Y_0 = Z(t) = P^{-1}Y(t) = P^{-1}e_A(t)Y_0$$

Ceci est vrai pour tout Y_0 donc $e_{P^1AP}(t)P^{-1} = P^{-1}e_A(t)$.
Donc pour tout réel t : $e_{P^{-1}AP}(t) = P^{-1}e_A(t)P$.

(b) Si A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, la solution de (L) est Y de fonctions cordonnées $y_1, ..., y_n$ avec :
$y_1(t) = \alpha_1 e^{t\lambda_1}, ..., y_n(t) = \alpha_n e^{t\lambda_n}$.

La condition $Y(0) = Y_0$ impose, $\forall i$, $\alpha_i = Y_{0,i}$. Donc pour tout réel t, $Y(t) = D(t)Y_0$ où $D(t)$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont $e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\, e_A(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A(z) = z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$; $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
$e_{P^{-1}AP}(t) = e_D(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$; $e_A(t) = Pe_D(t)P^{-1}A = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}$

8. (a) Soit $F(t) = \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)ds e^{-\beta t}$. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$F'(t) = -\beta e^{-\beta t}(\alpha + \beta \int_0^t \phi(s)ds) + e^{-\beta t}\beta\phi(t) = \beta e^{-\beta t}\left(\phi(t) - \alpha - \beta \int_0^t \phi(s)ds\right)$$

Par hypothèse, pour tout t, $F'(t) \leq 0$. F est décroissante. Pour $t \geq 0$, $F(t) \leq F(0)$. Comme $e^{-\beta t} > 0$, $\alpha + \int_0^t \phi(s)ds \leq \alpha e^{\beta t}$.
L'inégalité donnée en hypothèse donne alors :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\, \phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)ds \leq \alpha e^{\beta t}$$

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_A'(t) = Ae_A(t)$ et $\int_0^t e_A'(s)ds = e_A(t) - e_A(0) = \int_0^t Ae_A(s)ds$.
$e_A(t) = I_n + \int_0^t Ae_A(s)ds$. Comme on a une norme on a :

$$\forall t \geq 0,\, |||e_A(t)||| \leq |||I_n||| + |||\int_0^t Ae_A(s)ds||| \leq 1 + \int_0^t |||Ae_A(s)|||ds$$

Avec les propriétés de la norme triple :

$$|||e_A(t)||| \leq 1 + \int_0^t |||A||| \times |||e_A(s)|||ds$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le résultat de la question précédente avec $\alpha = 1$, $\beta = |||A|||$ et $\phi : t \mapsto |||e_A(t)|||$. On obtient directement :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\, |||e_A(t)||| \leq e^{|||A||| \times t}.$$

De même pour tout réel t positif :

$$|||e_A(-t)||| \leq |||I_n||| + |||\int_{-t}^{0} Ae_A(s)ds||| \leq 1 + \int_{-t}^{0} |||Ae_A(s)|||ds$$

$$|||e_A(-t)||| \leq 1 + \int_{0}^{t} |||Ae_A(-s)|||ds \leq 1 + \int_{0}^{t} |||A||| \times |||e_A(-s)|||ds$$

Le résultat précédent appliqué à $\phi : t \mapsto |||e_A(-t)|||$ donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |||e_A(-t)||| \leq e^{|||A||| \times (-t)}.$$

En résumé : $\forall t \in \mathbb{R},\ |||e_A(-t)||| \leq e^{|||A||| \times |t|}$.

9.

$$(U) \left\{ \begin{array}{c} Z'(t) = AZ(t) + g(t) \\ Z(0) = Z_0 \end{array} \right.$$

(a) Soit la fonction Z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Z(t) = e_A(t) \left(Z_0 + \int_0^t e_A(-s)g(s)ds \right)$$

Z est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $s \mapsto e_A(-s)g(s)$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; son intégrale est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et le produit par $e_A(t)$ permet de définir ne application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Z'(t) = e'_A(t) \left(Z_0 + \int_0^t e_A(-s)g(s)ds \right) + e_A(t)e_A(-t)g(t) = AZ(t) + g(t)$$

Comme $Z(0) = e_A(0)Z_0 = I_nZ_0 = Z_0$, Z est la solution maximale (sur $\mathbb{R}$) du problème de Cauchy (U).

(b) Si $\tilde{Z} : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (U) sur un intervalle ouvert contenant 0, alors , par application du théorème 1 (équation du type $Y' = f(Y)$ avec f $\mathcal{C}^1$), $\tilde{Z}(t) = Z(t)$ pour tout $t \in I$.

10. (a) Soit $a > 0$. On résout l'équation différentielle (E) : $y' - \lambda y = g$ en utilisant la méthode de variation de la constante. Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et k la fonction telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = k(t)e^{\lambda t}$.

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}, \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ k'(t)e^{\lambda t} = g(t)$$

Les solutions sont donc de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t} \left(y_0 + \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)ds \right)$$

Comme $g(t) =_{+\infty} o(e^{-at})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que

$$s \geq M \Rightarrow |g(s)| \leq \varepsilon e^{-as}$$

Soit donc ε fixé et M associé :

$$t \geq M \Rightarrow |y(t)| \leq e^{\lambda t}|y_0| + \varepsilon e^{\lambda t} \int_0^t e^{-(\lambda+a)s}ds \quad \text{avec } \lambda < -a$$

$$t \geq M \Rightarrow |y(t)| \leq e^{\lambda t}|y_0| + \varepsilon e^{\lambda t}\frac{e^{-(\lambda+a)t}-1}{-(\lambda+a)}$$

Pour $t \geq M$:

$$e^{at}|y(t)| \leq e^{(a+\lambda)t}|y_0| + \varepsilon e^{(\lambda+a)t}\frac{e^{-(\lambda+a)t}-1}{-(\lambda+a)} \leq e^{(a+\lambda)t}|y_0| + \frac{\varepsilon}{-(\lambda+a)}\left(1-e^{(\lambda+a)t}\right)$$

Comme $\lambda + a < 0$ cette expression tend vers $\dfrac{\varepsilon}{-(\lambda+a)}$ quand t tend vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon' > 0$ on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $-(\lambda+a)\varepsilon' = 2\varepsilon$.

Pour t assez grand, $e^{at}|y(t)| \leq \dfrac{2\varepsilon}{-(\lambda+a)} = \varepsilon'$.

On a donc établi que $y(t) =_{+\infty} o(e^{-at})$.

(b) Si A est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$, le système différentiel à résoudre est un système différentiel qu'on résout en commençant par la dernière équation. Notons $y_1, ..., y_n$ les fonctions coordonnées de Y.

On obtient à chaque ligne une équation du type $y_1' = \lambda_i y_i + g_i$, où g_i est obtenu comme combinaison linéaire des y_j, $j \geq i$.

On raisonne par récurrence descendante.

$y_n(t) = c^{\lambda_n t} = o_{+\infty}(e^{-at)}$ car $\lambda_n < -a$.

Supposons ce résultat établi pour $y_{i+1}, ..., y_n$. On a $g_i = o_{+\infty}(e^{-at})$. Le résultat de la question précédente montre que $y_i(t) = o_{+\infty}(e^{-at})$.

Par suite $e^{at}||Y(t)|| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(e^{at}y_i(t)\right)^2}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

On a bien : $||Y(t)|| = o_{+\infty}(e^{-at})$.

(c) Si le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable .Notons K le maximum des valeurs propres. Par hypothèse $K < 0$ et en prenant $a = -K/2$, pour chaque valeur propre λ_i, $\lambda_i < -a$.

Soit T la matrice triangulaire semblable à A . D'après la question 10.b) les solutions de $Y' = TY$ vérifient toutes $||Y(t)|| = o_{+\infty}(e^{-at})$.

Prenons une solution de valeur initiale e_i, un des vecteurs de la base canonique. On obtient la colonne d'indice i de $e_T(t)$ dont toutes les fonctions coordonnées sont négligeables devant e^{-at}. Il en est de même pour toutes les fonctions coordonnées de $e_T(t)$ et, comme toutes les normes sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||e_T(t)||| = o_{+\infty}(e^{-at})$.

Mais d'après la question 7.b) $e_A(t) = Pe_T(t)P^{-1}$ avec $A = PTP^{-1}$ donc $|||e_A(t)||| \leq |||e_T(t)||| \times |||P||| \times |||P^{-1}|||$. On a donc par majoration

$$|||e_A(t)||| = o_{+\infty}(e^{-at}).$$

11. $A \in O_n(\mathbb{R})$, $A^2 + I_n = 0$.

(a) Le polynôme $X^2 + 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. C'est un polynôme annulateur de A. Cette matrice est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{-i, i\}$. Mais le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels. Donc si α est une racine d'ordre r de ce polynôme, $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre r de ce polynôme. Le spectre de A est donc exactement $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$ et $\chi_A(z) = (-1)^{2r}(z-i)^r(z+i)^r = (z^2+1)^r$. Le degré de ce polynôme est $n = 2r$. n est un entier pair.

(b) On peut construire une famille orthonormale de n vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_1', ..., \varepsilon_r, \varepsilon_r')$ tels que pour tout i, $A\varepsilon_i = \varepsilon_i'$ et donc $A\varepsilon_i' = -\varepsilon_i$. A est orthogonalement semblable à une matrice Δ diagonale par blocs formée de r blocs carrés $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On résout facilement le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x'' = -x \\ y = -x' \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / , \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x(t) = a\cos t + b\sin t \\ y(t) = a\sin t - b\cos t \end{array} \right.$$

avec $x(0) = a$ et $y(0) = -b$. Pour toute solution Y_1 de ce système on a donc $||Y_1(t)||^2 = a^2 + b^2 = ||Y_1(0)||^2$.
Par suite $|||e_{A_1}(t)||| = 1$. De la même manière $|||e_\Delta(t)||| = 1$.
On remarque que la matrice $e_\Delta(t)$ est orthogonale. A est orthogonalement semblable à Δ. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$. D'après la question 7.a) $e_A(t) = Pe_\Delta(t)P^{-1}$. La matrice $e_A(t)$ est donc également orthogonale. Par suite, pour tout vecteur Y_0 de $\mathbb{R}^n$, les vecteurs $e_A(t)Y_0$ et $P^{-1}e_A(t)PY_0$ ont même norme.
Par définition de la norme triple :

$$|||e_A(t)||| = |||P^{-1}e_A(t)P||| = |||e_\Delta(t)||| = 1.$$

Troisième partie : linéarisation

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dans cette partie on s'intéresse à la solution de

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right.$$

12. Soit $Y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ une solution de (S). On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = l \in \mathbb{R}^2$ existe. On suppose que $f(l) \neq 0$.

(a) Pour tout t, $Y'(t) = f(Y(t))$ et $\langle Y'(t), f(l)\rangle = \langle f(Y(t)), f(l)\rangle$.
Par continuité du produit scalaire et composition de limites :

$$\lim_{t\to+\infty} \langle f(Y(t)), f(l)\rangle = ||f(l)||^2.$$

Par définition de la limite, il existe $M > 0$ tel que, $\forall t \in [M, +\infty[$, $\langle f(Y(t)), f(l)\rangle \in [||f(l)||^2 - r, ||f(l)||^2 + r]$ avec $r > 0$ quelconque.
En prenant $r = \frac{||f(l)||^2}{2}$ on peut affirmer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$t \geq M \Rightarrow \langle Y'(t), f(t)\rangle \geq \frac{1}{2}||f(l)||^2.$$

(b) Soit alors $H : t \mapsto \langle Y(t), f(l)\rangle - (t-M)\dfrac{||f(l)||^2}{2} - \langle Y(M), f(l)\rangle$.
H est continue dérivable sur $[M, +\infty[$ avec :

$$\forall t \geq M,\ H'(t) = \langle Y'(t), f(l)\rangle - \frac{||f(l)||^2}{2} \geq 0$$

H est donc croissante et pour $t \geq M$, $H(t) \geq H(M) = 0$. On a donc :

$$\forall t \in [M, +\infty[,\ \langle Y(t), f(l)\rangle \geq (t-M)\frac{||f(l)||^2}{2} + \langle Y(M), f(l)\rangle.$$

(c) Dans l'inégalité précédente la limite du minorant est $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Or la quantité majorante tend vers $\langle l, f(l)\rangle$. Contradiction.
D'où $f(l) = 0$.

13. Dans cette question on suppose que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} z + \alpha(y^2+z^2) \\ -y + \alpha(y^2+z^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (S).

(a) Si $\alpha = 0$, on retrouve le système étudié en 11.b). Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et les trajectoires sont des cercles ($z^2 + y^2$ est une fonction constante).

(b) $\alpha < 0$; on admet dans que $[0, +\infty[\subset I$. lorsque $\alpha < 0$.
Soit $u : t \mapsto ||Y(t)||^2$. u est $\mathcal{C}^1$ sur I avec

$$\forall t \in I,\ u'(t) = 2\langle Y'(t), Y(t)\rangle = 2y^2(t)\alpha(y^2(t)+z^2(t)) + 2y^2(t)\alpha(z^2(t)+z^2(t)) = 2\alpha u^2(t)$$

La fonction u est positive et décroissante sur I ($\alpha < 0$). Elle admet donc une limite en $+\infty$.
Si pour un certain t_0 $u(t_0) = 0$ alors, par décroissance $u(t) = 0$ pour $t \geq t_0$. La limite est nulle.
Si pour tout t , $u(t) \neq 0$

$$u'/2u^2 = \alpha \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} / \forall t \in I,\ -1/(2u) = \alpha t + K$$

On a donc

$$\forall t \in I, ||Y(t)||^2 = u(t) = \frac{-1}{2(\alpha t + K)}$$

Dans les deux cas la limite est nulle et $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = 0$.

(c) On suppose $Y_0 \neq 0$, $\alpha > 0$. La solution est non nulle sur un voisinage de 0 et vérifie

$$||Y(t)||^2 = \frac{-1}{2(\alpha t + K)} \text{ avec } \quad ||Y(0)||^2 = ||Y_0||^2 = \frac{-1}{2K}$$

Comme la fonction u est croissante, pour tout t de I, $u(t) \geq u(0) > 0$ et l'expression de $||Y(t)||^2$ est celle donnée plus haut.

Notons $T = \frac{1}{2\alpha||Y_0||^2}$. Si Y est définie sur $[0, T[$, alors, d'après l'expression précédente, $\lim\limits_{t\to T} ||Y(t)||^2 = +\infty$.
La solution Y ne peut donc être définie en T et I , intervalle qui contient 0, vérifie. $I \subset]-\infty, T[$.

14. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, dont toutes les valeurs propres sont strictement négatives et telle que $||f(x) - Ax|| = o(||x||)$ quand $x \to 0$.

(a) D'après l'inégalité on a nécessairement $f(0) = 0$. De plus $f(x) = f(0) + Ax + o(||x||)$ donc $x \mapsto Ax$ est l'application linéaire tangente en 0. Sa matrice dans la base canonique, A, est la matrice jacobienne de f en 0. Cela suffit ? ? ? ?

(b) Soit $Y : I \to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (S).
Soit $F : t \mapsto e_A(-t)Y(t)$. F est dérivable sur I et $\forall t \in I$,
$F'(t) = -e'_A(-t)Y(t) + e_A(-t)Y'(t) = -Ae_A(-t)Y(t) + e_A(t)f(Y(t))$.
Nous allons démontrer en fin de question que , pour tout s, $e_A(s)$ et A commutent. D'où $F'(t) = e_A(-t)(-AY(t) + f(Y(t)))$.
On a alors :

$$F(t) - F(0) = e_A(-t)Y(t) - Y_0 = \int_0^t e_A(-s)(-AY(s) + f(Y(s)))ds$$

$$Y(t) = e_A(t)\left(Y_0 + \int_0^t e_A(-s)(-AY(s) + f(Y(s)))ds\right)$$

Si L est une application linéaire on a $L\left(\int_a^b f(u)du\right) = \int_a^b L(f(u))du$ donc :

$$Y(t) = e_A(t)Y_0 + \int_0^t e_A(t)e_A(-s)(-AY(s) + f(Y(s)))ds$$

$$Y(t) = e_A(t)Y_0 + \int_0^t e_A(t-s)(-AY(s) + f(Y(s)))ds$$

Pour $t \geq 0$ on obtient :

$$||Y(t)|| \leq |||e_A(t)||||Y_0|| + \int_0^t |||e_a(t-s)||| \times ||f(Y(s)) - AY(s)||ds$$

La matrice A vérifie les hypothèses de la question 10.c) et donc il existe $a > 0$ tel que $|||e_A(t)||| = o_{+\infty}(e^{-at})$. La fonction $t \mapsto e^{at}|||e_A(t)|||$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit K un majorant.
Pour tout réel x positif, $|||e_A(x)||| \leq Ke^{-ax}$.
On obtient ($t - s \geq 0$ si $s \in [0, t]$) :

$$||Y(t)|| \leq Ke^{-at}||Y_0|| + \int_0^t e^{-a(t-s)} \times ||f(Y(s)) - AY(s)||ds$$

Si de plus on a

$$\forall s \in [0, t],\ ||f(Y(s)) - AY(s)|| \leq \varepsilon||Y(s)||.$$

alors

$$||Y(t)|| \leq Ke^{-ta}\left(||Y_0|| + \int_0^t e^{sa}\varepsilon||Y(s)||ds\right)$$

Remarque : $e_A(t)$ et A commutent. En effet $A = e'_A(0) = \lim_{s\to 0}\dfrac{e_A(s) - I_n}{s}$.
Pour t fixé :

$$Ae_A(t) = \lim_{s\to 0}\frac{e_A(s+t) - e_A(t)}{s} = e_A(t)\lim_{s\to 0}\frac{e_A(s) - I_n}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{e_A(s) - I_n}{s}e_A(t) = e_A(t)A$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que $x \in V \Rightarrow ||f(x) - Ax|| \leq \varepsilon||x||$. Soit $r > 0$ tel que $||x|| < r \Rightarrow x \in V$. Prenons Y_0 tel que $||Y_0|| < r$; par continuité de Y il existe un intervalle $[0, t_1]$ tel que sur cet intervalle $Y(t) \in V$.
Sur cet intervalle la condition précédente est vérifiée et

$$||e^{ta}Y(t)|| \leq K\left(||Y_0|| + \int_0^t e^{sa}\varepsilon||Y(s)||ds\right)$$

On peut appliquer le résultat de la question 8.a)

$$\forall t \in [0, t_1], ||Y(t)e^{at}|| \leq K||Y_0||e^{\varepsilon K||Y_0||t}$$

$$\forall t \in [0, t_1], ||Y(t)|| \leq K||Y_0||e^{(\varepsilon K||Y_0|| - a)t}$$

Prenons de plus Y_0 tel que $K||Y_0|| < r$ et $\varepsilon K||Y_0|| < a/2$. On obtient avec les trois conditions sur $||Y_0||$ un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, t_1], ||Y(t)|| < re^{(-a/2)t} \leq r$$

Cette inégalité est vraie pour t_1 et peut donc se prolonger tant que $||Y(t)|| < r$. Elle est vraie sur $\mathbb{R}^+$ et on a mis en évidence $b > 0$, $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que pour $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ avec $||Y_0|| \leq \delta$ on a

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ ||Y(t)|| \leq Ce^{-bt}.$$

(d) Soit $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $z : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient

$$\begin{cases} y' = zy(1-y) \\ z' = y - z \\ y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \end{cases}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{R}$.

Effectuons le changement de fonctions inconnues $y = 1 + y_1$, $z = 1 + z_1$. On obtient le système

$$\begin{cases} y'_1 = (1+z_1)(1+y_1)(-y_1) \\ z'_1 = y_1 - z_1 \end{cases}$$

On a un système du type précédent $Y_1' = f(Y_1)$, f de classe $\mathcal{C}^1$ et la matrice jacobienne de f en 0 est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est scindé, il y a une seule valeur propre, -1, strictement négative.
Le résultat de la question 14.c) s'applique et il existe $\delta > 0$ tel que si $||Y_1(0)|| \leq \delta$, alors $||Y_1(t)|| \leq Ce^{-bt}$. La limite de $||Y_1(t)||$ est donc 0, Y_1 tend vers 0 et Y tend vers (1,1). Par suite il existe $\delta > 0$ tel que si $|y_0 - 1|^2 + |z_0 - 1|^2 \leq \delta^2$, alors $y(t)$ et $z(t)$ tendent vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$.