ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2010 FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
Corrigé

Première partie : étude de quelques équations intégrales

1. $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ est une fonction continue.$z\in\mathbb{C}$, $z\neq 1$; $\phi_z:[0,1]\to\mathbb{C}$ est continue :

$$(E_z)\qquad \phi_z(x)-z\int_0^1 e^{x-y}\phi_z(y)dy=f(x).$$

1a. Comme ne l'indique pas l'énoncé, soit ϕ_z **une solution de** (E_z).
On note $\xi_z=\displaystyle\int_0^1 e^{-y}\phi_z(y)dy$. $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 e^{x-y}\phi_z(y)dy=e^x\xi_z$.
On peut écrire, pour tout $x\in[0,1]$: $\phi_z(x)=ze^x\xi_z+f(x)$.

1b. Les solutions éventuelles de (E_z) sont donc de la forme $x\mapsto kze^x+f(x)$.
Soit h_k une telle fonction. Pour tout $x\in[0,1]$,
$\displaystyle\int_0^1 e^{x-y}h_k(y)dy=\int_0^1 e^xkzdy+\int_0^1 e^{x-y}f(y)dy=e^x\left(kz+\int_0^1 e^{-y}f(y)dy\right).$
Dans le cas où $z\neq 0$:
h_k solution $\Leftrightarrow\forall x\in[0,1],\quad ke^x=e^x\left(kz+\displaystyle\int_0^1 e^{-y}f(y)dy\right)$
h_k solution $\Leftrightarrow\quad k(1-z)=z\displaystyle\int_0^1 e^{-y}f(y)dy.$
Si $z\neq 1$, (E_z) possède une et une seule solution :

$$\phi_z:x\mapsto f(x)+e^x\frac{z}{1-z}\int_0^1 e^{-y}f(y)dy$$

.
Résultat vrai de manière évidente si $z=0$.

2. f et K sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, f c^2 et K c^1. $z\in\mathbb{C}$, $\phi_z:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et 2π-périodique :

$$(F_z)\qquad \phi_z(x)-\frac{z}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(x-t)\phi_z(t)dt=f(x)$$

2a. Soit $g\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K(x-t)g(t)dt.$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $t\mapsto K(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence de h.
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K(x+2\pi-t)g(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}K(x-t)g(t)dt$ et donc $h(x+2\pi)=h(x)$

Pour la continuité il suffit d'utiliser le théorème au programme des classes de PC concernant les intégrales dépendant d'un paramètre. K, g sont continues et 2π-périodiques donc bornées sur $\mathbb{R}$. Notons $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |g|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |K|$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto K(x-t)g(t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc intégrable sur ce segment.
- $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $x \mapsto K(x,t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[-\pi, \pi]$, $|K(x-t)g(t)| \le M_1M_2 = \varphi(t)$ où la fonction (constante) φ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

h est donc est continue sur $\mathbb{R}$. Pour le calcul des coefficients de Fourier utilisons le théorème de Fubini sur un pavé avec des fonctions continues.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $(2\pi)^2\hat{h}(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)g(t)dt\right)e^{-inx}dx$

$(2\pi)^2\hat{h}(n) = \displaystyle\iint_{[-\pi,\pi]^2} K(x-t)e^{-inx}g(t)dtdx = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)e^{-inx}dx\right)dt$

$(2\pi)^2\hat{h}(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\int_{-\pi-t}^{\pi-t} K(u)e^{-in(u+t)}du\right)dt \quad (u = x-t)$

La fonction $u \mapsto K(u)e^{-inu}$ est 2π-périodique. On obtient :

$(2\pi)^2\hat{h}(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(u)e^{-inu}du\right)dt(2\pi)^2\hat{g}(n)\hat{K}(n)$.

Finalement :

$$\hat{h}(n) = \hat{K}(n)\hat{g}(n).$$

Remarque : on utilise ici le classique produit de convolution de deux fonctions de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *qui reste un élément de* $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et dont les coefficients de Fourier vérifient la relation simple démontrée ici.*

2b. Soit ϕ_z une solution éventuelle de (F_z). En utilisant la notation de la question précédente avec $g = \phi_z$, $\phi_z = zh + f$.
Par linéarité du calcul des coefficients de Fourier :
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\phi}_z(n) = z\hat{h}(n) + \hat{(}n) = z\hat{K}(n)\hat{\phi}_z(n) + \hat{f}(n)$.
Si de plus, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $z\hat{K}(n) \neq 1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{\phi}_z(n) = \frac{\hat{f}(n)}{1 - z\hat{K}(n)}$$

Deux solutions éventuelles ont donc les mêmes coefficients de Fourier ; comme elles sont continues, elles sont égales. Une solution éventuelle est donc unique.
K est continue, $\lim_{n\to\pm\infty} |\hat{K}(n)| = 0$; f est c^2 , $|\hat{f}(n)| = \dfrac{|c_n(f'')|}{n^2} =_{\pm\infty} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Notons alors pour tout n de $\mathbb{Z}$, $c_n = \dfrac{\hat{f}(n)}{1 - z\hat{K}(n)}$.
Soit $\varphi_0 : t \mapsto c_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : t \mapsto c_{-n}e^{-int} + c_ne^{int}$.
$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n| \le |c_{-n}| + |c_n| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
La série $\sum \varphi_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction ϕ continue et 2π-périodique. Fixons $p \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)e^{-ipt}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t)e^{-ipt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)e^{-ipt}dt$$

(convergence normale de $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-ipt}\varphi_n(t)$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.)

En utilisant le produit scalaire habituel de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et en notant $e_p : t \mapsto e^{-ipt}$:

Soit $p \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)e^{-ipt}dt = 2\pi c_0\langle e_0, e_p\rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi \left(c_{-n}\langle e_{-n}, e_p\rangle + c_n\langle e_n, e_p\rangle\right) = 2\pi c_p$$

On a montré que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\hat{\phi}(p) = c_p$.

En reprenant les résultats de la question 2 appliqués à $g = \phi$ on a :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \hat{\phi}(n) - z\hat{h}(n) = c_n - z\hat{K}(n)c_n = \hat{f}(n)$$

La fonction $x \mapsto \phi(x) - \frac{z}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi(t)dt$ est élément de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et a les mêmes coefficients de Fourier que f.

Elle est donc égale à f et ϕ est solution de (F_z).

Remarque : le caractère c^1 de K n'est pas utilisé dans la démonstation, la continuité suffit. De plus si f est supposée seulement de classe c^1, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ est convergente et la démonstration précédente reste la même.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\phi_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe c^1 vérifiant :

$$(H_z) \qquad \phi_z(x) - z\int_0^x \phi_z(t)dt = e^x.$$

Par dérivation directe, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_z'(x) - z\phi(x) = e^x$.

ϕ_z est solution de l'équation différentielle (E) : $y' - zy = e^x$.

Si $z \neq 1$, une solution particulière est $x \mapsto \frac{e^x}{1-z}$.

La solution générale de (E) est donc $x \mapsto ke^{zx} + \frac{e^x}{1-z}$.

Réciproquement soit $\phi : x \mapsto ke^{zx} + \frac{e^x}{1-z}$.

Un calcul direct donne : $\phi(x) - z\int_0^x \phi(t)dt - e^x = k - \frac{z}{z-1}$

Donc si $z \neq 1$, (H_z) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi_z(x) = \frac{e^x - ze^{zx}}{1-z}$$

Dans le cas $z = 1$ le même raisonnement conduit à $\phi(x) = e^x(x+k)$. La seule solution est obtenue pour $k = 1$.

$$\phi_1(x) = e^x(x+1)$$

Deuxième partie : quelques considérations d'algèbre linéaire

4. 4a. $A \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $A^2 = A$. Notons $B = Id_E - zA$.
$B^2 = Id_E - 2zA + z^2A^2 = Id_E + (z-2)zA = Id_E + (z-2)(Id_E - B)$.
$B^2 + (z-2)B = (z-1)Id_E$.
Si $z \neq 1$, $B\left(\dfrac{1}{(z-1)}B + \dfrac{z-2}{(z-1)}Id_E\right) = Id_E = \left(\dfrac{1}{(z-1)}B + \dfrac{z-2}{(z-1)}Id_E\right)B$.
B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{(z-1)}B + \dfrac{z-2}{(z-1)}Id_E = Id_E - \dfrac{z}{z-1}A$.

4b. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, $A : \begin{cases} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}) \\ \phi \mapsto A\phi & A\phi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x-y}\phi(y)dy \end{cases}$
Pour $\phi \in E$, ϕ continue est bornée sur $[0,1]$ et on montre comme dans 2 que $A\phi$ est aussi élément de E.
La linéarité est claire. Pour tout ϕ de E :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(A\phi)(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x-y}\left(\int_0^1 e^{y-t}\phi(t)dt\right)dy.$
En utilisant le théorème de Fubini on obtient :

$$A(A\phi)(x) = \iint_{[0,1]^2} e^{x-t}\phi(t)dtdy = e^x\int_0^1\left(\int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt\right)dy = e^x\int_0^1 e^{-y}\phi(y)dy$$

$$\forall \phi \in E, \forall x \in [0,1], \quad A(A\phi)(x) = \int_0^1 e^{x-y}\phi(y)dy = A\phi(x)$$

On a bien $A^2 = A$. Si $z \neq 1$, $Id - zA$ est donc inversible.
Or $(E_z) \Leftrightarrow \phi - zA\phi = f$. Le problème a donc une solution unique
$\phi_z = B^{-1}(f) = f - \dfrac{z}{z-1}Af = f + \dfrac{z}{1-z}Af$.
On retrouve bien sûr la solution définie par :
$\phi_z(x) = f(x) + \dfrac{z}{1-z}e^x\displaystyle\int_0^1 e^{-y}f(y)dy$
inversible et retrouver le résultat de la question 1b.

5. Ici $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.$A : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ \phi \mapsto A\phi & A\phi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi(t)dt \end{cases}$

5a. On a montré dans la question 2 que si $\phi \in E$, $A\phi \in E$. La linéarité est évidente.
Pour deux éléments de E on a : $F = G \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \hat{F}(n) = \hat{G}(n)$.
Soit donc $\phi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$A\phi = \lambda\phi \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \hat{A\phi}(n) = \hat{\phi}(n)\hat{K}(n) = \lambda\hat{\phi}(n)$$

Soit donc λ une valeur propre de A. Il existe une fonction ϕ non nulle vérifiant $A\phi = \lambda\phi$. Il existe donc un élément $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\hat{\phi}(p) \neq 0$ (car sinon , comme ϕ est continue, ϕ serait nulle).
D'après ce qui précède $\hat{K}(p)\hat{\phi}(p) = \lambda\hat{\phi}(p)$ et donc $\lambda = \hat{K}(p)$.
Réciproquement en prenant $\lambda = \hat{K}(p)$,
$A\phi = \lambda\phi \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, (\hat{K}(n) - \hat{K}(p))\hat{\phi}(n) = 0$.
La fonction $\phi : t \mapsto e^{ipt}$ a tous ses coefficients de Fourier nuls sauf $\hat{\phi}(p)$ égal à

1. C'est une fonction non nulle de E qui vérifie les relations précédentes. C'est un vecteur propre associé à la valeur propre $\hat{K}(p)$.
L'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble $\left\{\hat{K}(n), n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5b. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z\hat{K}(n) \neq 1$. Les valeurs propres de l'opérateur $Id - zA$ sont les $1 - z\hat{K}(n)$, n dans $\mathbb{Z}$. L'hypothèse précédente montre donc que $Id_E - zA$ est injective car 0 n'est pas valeur propre. Les hypothèses proposées sur f et K sont "largement" suffisantes.
En effet on a montré en **2b**que si f était de classe c^1 et K était continue l'application B était surjective.
Remarque : l'énoncé de cette question me paraît assez peu clair et il est difficile de préjuger de ce qui est réellement attendu par le correcteur.

Troisième partie : équations intégrales, le cas général

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$, et $N : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ sont continues. $M = \sup_{(x,y)\in[a,b]^2} |N(x,y)|$.

$$(I_z) \qquad \phi_z(x) - z\int_a^b N(x,y)\phi_z(y)dy = f(x)$$

6. $N_0(x,y) = 1$, $\quad N_1(x,y) = N(x,y)$, pour $k \geq 2$, $N_k(x,y) = \displaystyle\int_a^b N(x,s)N_{k-1}(s,y)ds$.

$A(x,y,z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} N_k(x,y)z^{k-1}$.

6a. Démonstration par récurrence. Propriété vraie pour $k = 0, 1$.
Soit $k \geq 2$. Supposons N_{k-1} continue sur $[a,b]^2$. Pour (x,y) fixés, la fonction $s \mapsto N(x,s)N_{k-1}(s,y)$ est continue donc intégrable sur $[a,b]$.
D'où l'existence de N_k.
Pour la continuité utilisons la caractérisation séquentielle.
Soit $X = (x,y) \in [a,b]^2$. Soit $U_n = (x_n, y_n)$ une suite quelconque d'éléments de $[a,b]^2$ de limite X. Notons $f_n : s \mapsto N(x_n,s)N_{k-1}(s,y_n)$.
Par continuité des fonctions étudiées la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers $f : s \mapsto N(x,s)N_{k-1}(y,s)$.
Les fonctions N et N_{k-1} sont continues sur le compact $[a,b]^2$, donc bornées.
$\forall s \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(s)| = [N(x_n,s)N_{k-1}(s,y_n)| \leq M \times \sup_{[a,b]^2} |N_{k-1}| = C$.
$\varphi : s \mapsto C$ est une fonction positive continue, intégrable sur $[a,b]$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont réunies et donc
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_k(U_n) = \int_a^b f_n(s)ds = \int_a^b f(s)ds = N_k(x,y)$.
N_k est continue en X. N_k est continue sur $[a,b]^2$.

6b. La question précédente montre que :
$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |N_k(x,y)| \leq (b-a)M \sup_{[a,b]^2} |N_{k-1}|$.
Notons $M_k = \sup_{[a,b]^2} |N_k|$. $M_0 = 1$, $M_1 = M$ et $M_k \leq (b-a)M \times M_k$.
Par récurrence, pour $k \geq 1$, $M_k \leq (b-a)^{k-1}M^k$ et donc :
$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left|N_k(x,y)z^{k-1}\right| \leq ((b-a)M|z|)^{k-1} M$.
Si N est non nulle , $M > 0$ et en prenant $|z| \leq R < \dfrac{1}{M(b-a)}$ on obtient un

majorant terme général d'une série géométrique convergente. La série qui définit $A(x, y, z)$ converge normalement sur $[a, b]^2 \times \overline{D}(0, R)$.

Remarque : la définition de la convergence normale pour une série de fonctions (dans le cas général) n'est pas au programme des classes PC. Il aurait été judicieux de la rappeler. Une démonstration identique à celle du programme officiel de la classe de PC relative à la convergence normale des séries de fonctions continues sur un intervalle montre que la fonction A est continue sur $[a, b]^2 \times \overline{D}(0, R)$.

6c. $z \in \overline{D}(0, R)$ et $x \in [a, b]$, $\psi_z(x) = \displaystyle\int_a^b A(x, t, z) f(t) dt$.

R est un réel strictement positif qui vérifie la condition $M(b - a) < 1/R$.

Pour x, z fixés, la série qui définit la fonction $t \mapsto A(x, t, z)$ converge normalement sur $[a, b]$. La fonction est donc continue sur $[a, b]$ ainsi que $t \mapsto f(t)A(x, t, z)$. D'où l'existence de ψ_z.

$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \forall z \in \overline{D}(0, R), |A(x, y, z)| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} M(M(b-a)R)^{k-1} = \frac{1}{1 - RM(b - a)}$.

Comme f est continue, donc bornée sur $[a, b]$, il existe une constante K telle que $\forall (x, t) \in (a, b]^2$, $|A(x, t, z) f(t)| \leq K$.

Le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre s'applique ici.

Pour tout $z \in \overline{D}(0, R)$, ψ_z est continue sur $[a, b]$.

En appliquant le théorème de Fubini et en utilisant la convergence normale sur un segment qui permet d'intervertir $\int$ et $\sum$ on a :

$$z \int_a^b N(x, y) \psi_z(y) dy = \iint_{[a,b]^2} N(x, y) \sum_{k=1}^{+\infty} N_k(y, t) z^k f(t) dy dt$$

$$z \int_a^b N(x, y) \psi_z(y) dy = \int_{t=a}^{t=b} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} z^k \int_{y=a}^{y=b} N(x, y) N_k(y, t) dy \right) f(t) dt$$

$$z \int_a^b N(x, y) \psi_z(y) dy = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} z^k N_{k+1}(x, t) \right) f(t) dt$$

$$z \int_a^b N(x, y) \psi_z(y) dy = \int_a^b \left(A(x, t, z) - N_1(x, t) z^0 \right) f(t) dt$$

On obtient finalement :

$$z \int_a^b N(x, y) \psi_z(y) dy = \psi_z(x) - \int_a^b N(x, t) f(t) dt.$$

Notons alors $\phi_z = f + z\psi_z$.

$$z \int_a^b N(x, y) \phi_z(y) dy = z \int_a^b N(x, y)(f(y) + z\psi_z(y)) dy$$

$$z \int_a^b N(x, y) \phi_z(y) dy = z \int_a^b N(x, y) f(y) dy + z \left(\psi_z(y) - \int_a^b N(x, t) f(t) dt \right)$$

$$z\int_a^b N(x,y)\phi_z(y)dy = z\psi_z(y) = \phi_z(x) - f(x)$$

On vérifie donc que si $|z| < 1/(M(b-a))$, ϕ_z est solution de (I_z).

Remarque : la définition de R dans l'énoncé est ambigüe. Il aurait été plus cohérent de définir un R_0 et de se placer sur $\overline{D}(0,R)$ avec $R < R_0$.
La méthode proposée est une méthode de point fixe appliquée à un opérateur contractant.

$n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x_i, y_i, i = 1, ..., n$ dans $[a,b]$, $N\begin{pmatrix} x_1, ..., x_n \\ y_1, ..., y_n \end{pmatrix}$ est le déterminant de la matrice dont le coefficient de la k-ième ligne et l-ième colonne est $N(x_k, y_l)$.

7. En développant le déterminant par rapport à sa première ligne :

$$N\begin{pmatrix} x, s_1, ..., s_n \\ y, s_1, ..., s_n \end{pmatrix} = N(x,y)N\begin{pmatrix} s_1, ..., s_n \\ s_1, ..., s_n \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k N(x,s_k)N\begin{pmatrix} s_1, ..., s_n \\ y, s_1, ..., s_{k-1}, s_{k+1}, ..., s_n \end{pmatrix}$$

puis en échangeant dans les derniers déterminants les colonnes 1 et k

$$N\begin{pmatrix} x, s_1, ..., s_n \\ y, s_1, ..., s_n \end{pmatrix} = N(x,y)N\begin{pmatrix} s_1, ..., s_n \\ s_1, ..., s_n \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{n} N(x,s_k)N\begin{pmatrix} s_k, s_1, ..., s_{k-1}, s_{k+1}, ..., s_n \\ y, s_1, ..., s_{k-1}, s_{k+1}, ..., s_n \end{pmatrix}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq j \leq n$, $C_n^{(n)}(x, y, s_1, ..., s_n) = N\begin{pmatrix} x, s_1, ..., s_n \\ y, s_1, ..., s_n \end{pmatrix}$

pour tout $k = 1, ..., n-1$, $C_n^{(n-k)}(x, y, s_1, ..., s_{n-k}) = \displaystyle\int_a^b C_n^{(n-k+1)}(x, y, s_1, ..., s_{n-k+1})ds_{n-k+1}$.

$c_0(x,y) = N(x,y)$, $c_n(x,y) = \displaystyle\int_a^b C_n^{(1)}(x,y,s_1)ds_1$,

$a_0 = 1$, et si $n \geq 1$, $a_n = \displaystyle\int_a^b c_{n-1}(s,s)ds$.

8.

$$c_n(x,y) = \int_a^b C_n^{(1)}(x,y,s_1)ds_1 = \int_a^b\int_a^b C_n^{(2)}(x,y,s_1,s_2)ds_2ds_1$$

$$c_n(x,y) = \int_a^b\int_a^b ... \int_a^b C_n^{(n)}(x,y,s_1,...,s_n)ds_nds_{n-1}...ds_1$$

$$c_n(x,y) = \int_a^b\int_a^b ... \int_a^b N\begin{pmatrix} x, s_1, ..., s_n \\ y, s_1, ..., s_n \end{pmatrix} ds_nds_{n-1}...ds_1$$

La formule finale de la question 7 permet d' écrire cette intégrale comme une somme de deux termes.

$$\int_a^b ... \int_a^b N(x,y)N\begin{pmatrix} s_1, ..., s_n \\ s_1, ..., s_n \end{pmatrix} ds_n...ds_1 = N(x,y)\int_a^b ... \int_a^b C_{n-1}^{(n-1)}(s_1, s_1; s_2, ..., s_n)ds_n...ds_2ds_1$$

Puis en itérant :

$$\int_a^b ... \int_a^b N(x,y)N\begin{pmatrix} s_1, ..., s_n \\ s_1, ..., s_n \end{pmatrix} ds_n...ds_1 = N(x,y)\int_a^b c_{n-1}(s_1,s_1)ds_1 = N(x,y)a_n$$

Le deuxième terme est une somme

$$S=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b ... \int_a^b N(x,s_k)N\begin{pmatrix} s_k,s_1,...,s_{k-1},s_{k+1},...,s_n \\ y,s_1,...,s_{k-1},s_{k+1},....,s_n \end{pmatrix} ds_n...ds_1$$

En utilisant le théorème de Fubini et les formules de récurrence qui définissent les $C_n^{(p)}$ on a :

$$S=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b N(x,s_k)\left(\int_a^b ... \int_a^b C_{n-1}^{(n-1)}(s_k,y,s_1,...,s_{k-1},s_{k+1},...s_n)ds_n...ds_1\right)ds_k$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b N(x,s_k)c_{n-1}(s_k,y)ds_k = n\int_a^b N(x,s)c_{n-1}(s,y)ds$$

Finalement :

$$c_n(x,y)=N(x,y)a_n - n\int_a^b N(x,s)c_{n-1}(s,y)ds.$$

9. Par intégrations successives :

$$||c_n||_\infty \leq (b-a)^n \left|\left|N\begin{pmatrix} x,s_1,...,s_n \\ y,s_1,...,s_n \end{pmatrix}\right|\right|_\infty^{[a,b]^{n+1}}$$

Puis en utilisant l'inégalité d'Hadamard :

$$||c_n||_\infty \leq (b-a)^n(n+1)^{\frac{n+1}{2}}(||N||_\infty^{[a,b]^2})^{n+1}$$

En intégrant :

$$|a_n|\leq (b-a)^{n+1}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}M^{n+1}$$

On majore pour tout z le module du terme général de la série $D(z)$ par

$$U_n=\frac{(M(b-a)|z|)^n}{n!}M(b-a)(n+1)^{\frac{n+1}{2}}$$

Pour $z\neq 0$, $\dfrac{U_n+1}{U_n}=\dfrac{M(b-a)|z|}{n+1}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}(n+2)^{1/2}\sim\dfrac{K}{\sqrt{n}}\to 0$
car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}=e^{1/2}$.
La règle de d'Alembert nous donne le terme général d'une série convergente.
La série entière $D(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{a_n}{n!}z^n$ a donc un rayon de convergence infini.

10. On fixe $R>0$. Majoration identique pour $|c_n(x,y)|$. On obtient un majorant m_n de $\left|\dfrac{c_n(x,y)}{n!}z^n\right|$ pour tout $(x,y,z)\in[a,b]^2\times\overline{D}(0,R)$, m_n terme général d'une série convergente.

11. Considérons la série entière $S_{x,y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n(x,y)}{n!} z^n$.

La formule vue en 8 donne :

$$S_{x,y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \left(N(x,y) a_n - n \int_a^b N(x,s) c_{n-1}(s,y) ds \right)$$

La convergence normale permet l'interversion et :

$$S_{x,y}(z) = N(x,y)D(z) - \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n c_{n-1}(s,y)}{n!} N(x,s) z^n ds$$

$$S_{x,y}(z) = N(x,y)D(z) - z \int_a^b \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} c_p(s,y)}{p!} N(x,s) z^p ds$$

$$S_{x,y}(z) = N(x,y)D(z) + z \int_a^b \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p c_p(s,y)}{p!} N(x,s) z^p ds$$

$$S_{x,y}(z) = N(x,y)D(z) + z \int_a^b N(x,s) S_{s,y}(z) ds$$

12. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $D(z) \neq 0$, et ϕ_z définie par :

$$\phi_z(x) = f(x) + z \int_a^b \frac{S_{x,s}(z)}{D(z)} f(s) ds$$

On vérifie facilement que ϕ_z est une fonction continue sur $(a, b]$.
De plus, pour tout $x \in [a, b]$:

$$z \int_a^b \phi_z(y) N(x,y) dy = z \int_a^b f(y) N(x,y) dy + z^2 \iint_{[a,b]^2} \frac{S_{y,s}(z)}{D(z)} f(s) N(x,y) dy ds$$

$$z \int_a^b \phi_z(y) N(x,y) dy = z \int_a^b f(y) N(x,y) dy + z \int_a^b f(s) \left(z \int_a^b \frac{S_{y,s}(z)}{D(z)} N(x,y) dy \right) ds$$

Utilisons la relation démontrée en 11 :

$$z \int_a^b \phi_z(y) N(x,y) dy = z \int_a^b f(y) N(x,y) dy + z \int_a^b f(s) \left(\frac{S_{x,s}(z)}{D(z)} - N(x,s) \right) ds$$

$$z \int_a^b \phi_z(y) N(x,y) dy = z \int_a^b f(s) \frac{S_{x,s}(z)}{D(z)} ds = \phi_z(x) - f(x)$$

ϕ_z est bien solution de l'équation intégrale (I_z).

Il reste à établir que cette solution est unique. Soit ϕ une autre solution.
Pour tout (x, u) de $[a, b]^2$:

$$\phi(u) S_{x,u}(z) = f(u) S_{x,u}(z) + z \int_a^b N(u,s) \phi(s) S_{x,u}(z) ds$$

Par intégration :

$$\int_a^b \phi(u)S_{x,u}(z)du = \int_a^b f(u)S_{x,u}(z)du + z\iint_{[a,b]^2} N(u,s)\phi(s)S_{x,u}(z)dsdu$$

$$\int_a^b \phi(u)S_{x,u}(z)du = D(z)\left(\phi_z(x) - f(x)\right) + \int_a^b \phi(s)\left(z\int_a^b N(u,s)S_{x,u}(z)du\right)ds$$

en remarquant qu'on a également (? ? ? ?) que $S_{x,y}(z) = D(z)N(x,y) + z\int_a^b S_{x,u}N(u,y)du$

$$\int_a^b \phi(u)S_{x,u}(z)du = D(z)\left(\phi_z(x) - f(x)\right) + \int_a^b \phi(s)\left(S_{x,s}(z) - D(z)N((x,s)\right)ds$$

Par différence :

$$0 = D(z)\left(\phi_z(x) - f(x) - z\int_a^b N(x,s)\phi(s)ds\right) = D(z)\left(\phi_z(x) - \phi(x)\right)$$

Comme $D(z) \neq 0$, on a , $\forall x \in [a,b] : \phi_z(x) = \phi(x)$

Remarque : En notant A et B les opérateurs de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ définis par
$\forall x \in [a,b]$, $A\phi(x) = \int_a^b N(x,y)\phi(y)dy$ *et* $\forall x \in [a,b]$, $B\phi(x) = \int_a^b \frac{S(x,y)}{D(z)}\phi(y)dy$
l'équation fonctionnelle s'écrit $(Id_E - zA)(\phi) = f$*.*
La relation de la question 11 , utilisée en 12, montre que :

$$(Id_E - zA) \circ (Id_E + zB) = Id_E$$

$(Id_E + zB)(f)$ *est donc solution du problème. C'est bien la fonction proposée en 12.*
L'opérateur admet un inverse à droite. Il est surjectif.
Il reste à démontrer que $Id_E + zB$ *est aussi inverse à gauche. Ce résultat est équivalent au fait que les opérateurs A et B commutent. (cf. formule admise dans la correction de 12).Cette formule est obtenue en développant les déterminants de la question 7 non plus suivant les colonnes, mais suivant les lignes. Toute cette dernière partie reprend la méthode classique de résolution développée par A. Fredholm dans son article "Sur une classe d'équations fonctionnelles" - Acta Mathematica 27 (1903) p. 365-390 .*

⋆ ⋆
⋆

Corrigé proposé pour l'UPS par H. Demongeot