ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI 2001

Filière PC - Première épreuve

Première Partie

Au début de cette partie une faute de frappe: Il faut lire $n \in \mathbb{N}$ au lieu de $n \in \mathbb{R}$.

1.a) $g_n : x \mapsto (x^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ de terme dominant x^{2n} donc avec $P_n = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}g_n$

$\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de terme dominant } \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n.}$

b) Pour tout n, g_n est un polynôme pair donc, pour k pair ($k \leqslant 2n$), $\dfrac{d^k}{dx^k}g_n$ est un polynôme pair, et pour k impair, $\dfrac{d^k}{dx^k}g_n$ est un polynôme impair. En particulier, $\boxed{P_n \text{ a la même parité que } n.}$

c) En calculant P_n par la formule de Leibniz appliquée à $g_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ on obtient $\boxed{P_n(1) = 1}$ et en tenant compte de la parité $\boxed{P_n(-1) = (-1)^n.}$

2. On prouve $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m\,dx = 0$ par intégration par parties successives sachant que pour $k < n$, $\dfrac{d^k}{dx^k}g_n$ s'annule en 1 et -1.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}g_n(x)x^m dx &= \Big[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}g_n(x)x^m\Big]_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}g_n(x)x^{m-1}dx \\
&= -m\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}g_n(x)x^{m-1}dx \\
&= (-1)^m m!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}g_n(x)dx \\
&= (-1)^m m!\Big[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}g_n(x)\Big]_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{P_n \text{ est donc orthogonal à tout polynôme de degré au plus } n-1.}$

3.a) Pour $m < n$, P_m est de degré m donc d'après 2., $(P_n|P_m) = 0$.

b) Toujours d'après 2., $(P_n|P_n) = (P_n|\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n)$ et l'intégration par parties de cette même question donne

$$\begin{aligned}
(P_n|P_n) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3}(-1)^n n!\int_{-1}^{1}g_n(x)dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx
\end{aligned}$$

On calcule cette dernière intégrale par parties:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx &= \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n dx \\
&= \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\cdots\frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}dx \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

On obtient enfin:

$$\boxed{(P_n|P_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}.}$$

(Remarque: par changement de variable $x = \cos t$ on ramène l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ à une intégrale de Wallis: $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n+1}dt$.)

4.a) Pour $m = 0$: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\big((x^2-1)P_n'(x)\big)dx = \big[(x^2-1)P_n'(x)\big]_{-1}^{1} = 0$

Pour $m \geqslant 1$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\big((x^2-1)P_n'(x)\big)x^m dx = \big[(x^2-1)P_n'(x)x^m\big]_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1}x^{m-1}(x^2-1)P_n'(x)dx$$
$$= -m\big[x^{m-1}(x^2-1)P_n(x)\big]_{-1}^{1} + m\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\big(x^{m-1}(x^2-1)\big)P_n(x)dx.$$

Or $\dfrac{d}{dx}\big(x^{m-1}(x^2-1)\big)$ est un polynôme de degré $m < n$ donc P_n lui est orthogonal et par suite $\boxed{\dfrac{d}{dx}\big((x^2-1)P_n'(x)\big) \text{ est orthogonal à } x^m \text{ pour } 0 \leqslant m \leqslant n-1.}$

b) $\dfrac{d}{dx}\big((x^2-1)P_n'(x)\big)$ est un polynôme de degré n, orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-1$, il est donc colinéaire à P_n. La comparaison des coefficients dominants donne:

$$\frac{d}{dx}\big((x^2-1)P_n'(x)\big) = \boxed{(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) = n(n+1)P_n(x)}$$

Deuxième Partie

La définition de $f_{n,m}$ présente une indétermination pour $|x| = 1$ et $m = 0$. Il faut convenir que sur $[-1,1]$, $f_{n,0} = P_n$

5.a) $x \mapsto (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ est une fonction paire, donc $f_{n,m}$ a la parité de $\dfrac{d^m}{dx^m}P_n$. Or P_n a la parité de n et la dérivation change la parité; on peut traduire la parité de $f_{n,m}$ par $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ f_{n,m}(-x) = (-1)^{n+m}f_{n,m}(x).}$

b) m étant positif ou nul, $x \mapsto (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ est continue sur $[-1,1]$ et par produit avec une fonction polynôme $f_{n,m}$ est continue sur $[-1,1]$.

Remarque: Si n et n' n'ont pas la même parité ($n+n'$ impair) le produit $f_{n,m}f_{n',m}$ est une fonction impaire et $(f_{n,m}|f_{n',m}) = 0$. Reste les cas n et n' ont la même parité mais en fait le calcul ci-dessous traite tous les cas.

On suppose $n' < n$.

$(f_{n,m}|f_{n',m}) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\frac{d^m}{dx^m}P_{n'}(x)\,dx = \int_{-1}^{1}Q(x)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\,dx$ où Q est un polynôme de degré $n'+m$ admettant 1 et -1 pour racines d'ordre m. Par IPP successives on obtient $(f_{n,m}|f_{n',m}) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}Q(x)P_n(x)\,dx$. Or $\dfrac{d^m}{dx^m}Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n' avec $n' < n$ donc P_n est orthogonal à ce polynôme et $\boxed{(f_{n,m}|f_{n',m}) = 0.}$

Troisième Partie

6.a) Partons de "$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ est un polynôme homogène de degré N" et écrivons $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ sous la forme $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \displaystyle\sum_J a_{i_1,i_2,i_3}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$ la somme étant étendue à un ensemble J de triplets i_1, i_2, i_3 d'entiers naturels tels que

$i_1+i_2+i_3=N$. Le polynôme q défini par, $q(x_1,x_2,x_3)=\sum_J \frac{a_{i_1,i_2,i_3}}{i_1+1}x_1^{i_1+1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$ vérifie $\frac{\partial q}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}$ donc il existe une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3)=q(x_1,x_2,x_3)+\varphi(x_2,x_3)$ Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ est un polynôme homogène de degré N, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ est un polynôme homogène de degré N en deux variables. En réitérant le raisonnenent avec φ on écrit $\varphi(x_2,x_3)=\sum_H \frac{b_{j_2,j_3}}{j_2+1}x_2^{j_2+1}x_3^{j_3}+\psi(x_3)$ où ψ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que ψ' soit un polynôme homogène de degré N en une seule variable. On a donc $\psi'(x_3)$ de la forme cx_3^N puis $\psi(x_3)=\frac{c}{N+1}x_3^{N+1}+\mu$. La fonction f s'annule en 0 donc $\mu=0$ et f est somme de fonctions polynômes homogènes de degré $N+1$.

b) On raisonne par récurrence sur N.

• $N=0$ f est supposée continue sur $\mathbb{R}^3$ et vérifiant $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\lambda\in\mathbb{R},\quad f(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)=f(x_1,x_2,x_3)$. On a donc $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\quad f(0,0,0)=f(x_1,x_2,x_3)$ et f est un polynôme constant ou homogène de degré 0.

• On suppose la propriété démontrée pour un certain N.
Soit f de classe C^{N+1} vérifiant $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\lambda\in\mathbb{R},\quad f(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)=\lambda^{N+1}f(x_1,x_2,x_3)$.
Pour $i=1,2,3$, en dérivant cette égalité par rapport à x_i on obtient:
$\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\lambda\in\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)=\lambda^N\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)$. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe C^N donc l'hypothèse de récurrence assure que les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des polynômes homogènes sur $\mathbb{R}^3$ de degré N et comme $f(0,0,0)=0$, d'après la question précédente $\boxed{f \text{ est un polynôme homogène de degré } N+1.}$

7. La relation de l'énoncé ou relation d'Euler se vérifie immédiatement sur les monômes $x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$, ce qui suffit par linéarité des dérivations partielles.

8.
Justifions d'abord l'indépendance des monomes $x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$ pour $(i_1,i_2,i_3)\in\mathbb{N}^3$ tels que $i_1+i_2+i_3=N$
Si $f=\sum a_{i_1,i_2,i_3}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}=0$ alors $a_{i_1,i_2,i_3}i_1!i_2!i_3!=\frac{\partial^N f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\partial x_3^{i_3}}=0$ et donc $a_{i_1,i_2,i_3}=0$.

La dimension de $\mathcal{F}_N$ est égale au nombre de triplets d'entiers naturels (i_1,i_2,i_3) tels que $i_1+i_2+i_3=N$ ou au nombre de couples d'entiers naturels (i_1,i_2) tels que $i_1+i_2\leqslant N$. Pour chaque i_1 fixé dans $\{0,\dots,N\}$, i_2 peut prendre $N+1-i_1$ valeurs. On obtient ainsi $(N+1)+N+(N-1)+\ldots+1$ couples (i_1,i_2) tels que $i_1+i_2\leqslant N$. On a donc $\boxed{\dim\mathcal{F}_N=\frac{(N+1)(N+2)}{2}.}$

9.a) En calculant le laplacien d'un monôme, on vérifie que $\Delta\mathcal{F}_N\subset\mathcal{F}_{N-2}$. ($\Delta$ est linéaire)
$\mathcal{H}_N$ est le noyau de Δ considéré comme endomorphisme de $\mathcal{F}_N$. Puisque $\mathrm{rg}\Delta\leqslant\dim\mathcal{F}_{N-2}$, le théorème du rang assure $\dim\operatorname{Ker}\Delta\geqslant\dim\mathcal{F}_N-\dim\mathcal{F}_{N-2}$ soit $\boxed{\dim\operatorname{Ker}\Delta\geqslant 2N+1.}$

b) Calcul de $\Delta(r^{2k}g)$: Pour $i\in\{1,2,3\}$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{2k}g)=kr^{2k-2}2x_ig+r^{2k}\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^{2k}g)=2kr^{2k-2}g+2k(2k-2)r^{2k-4}x_i^2g+4kr^{2k-2}x_i\frac{\partial g}{\partial x_i}+r^{2k}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$$

En sommant on obtient:

$$\Delta(r^{2k}g)=6kr^{2k-2}g+2k(2k-2)r^{2k-2}g+4kr^{2k-2}\sum_i x_i\frac{\partial g}{\partial x_i}+r^{2k}\Delta g$$

Comme $g\in\mathcal{F}_{N-2k}$, la question 7. donne $\sum_i x_i\frac{\partial g}{\partial x_i}=(N-2k)g$ et par suite

$$\boxed{\Delta(r^{2k}g)=r^{2k}\Delta g+2k(2N-2k+1)r^{2k-2}g}$$

10. Je ne suis pas exactement l'énoncé mais prouve par récurrence sur k que f s'écrit $r^{2k}u$ avec $u\in\mathcal{F}_{N-2k}$ ou $u=0$.

- $k = 1$ corespond à l'hypothèse de l'énoncé.
- f s'écrivant $r^2 g$ avec $g \in \mathcal{F}_{N-2}$, on a $\Delta f = r^2 \Delta g + (4N-2)g$ avec $\Delta g \in \mathcal{F}_{N-4}$ si $N \geqslant 4$ et $\Delta g = 0$ sinon. On a supposé f harmonique donc $\Delta f = 0$ soit $g = -\dfrac{r^2 \Delta g}{(4N-2)}$ et f s'écrit $f = \dfrac{r^4 \Delta g}{(2-4N)}$.
- Supposons f écrit sous la forme $r^{2k} g_1$ avec $g_1 \in \mathcal{F}_{N-2k}$ $(0 < 2k \leqslant N)$. Alors $\Delta f = 0 = r^{2k} \Delta g_1 + 2k(2N-2k+1) r^{2k-2} g_1$ et $f = \dfrac{r^{2k+2} \Delta g_1}{2k(2k-2N-1)}$ avec Δg_1 dans $\mathcal{F}_{N-2k-2}$ si $2k \leqslant N-2$ et $\Delta g_1 = 0$ si $2k = N$ ou $N-1$.

Pour k partie entière de $\dfrac{N}{2}$ on a $\Delta g_1 = 0$ et $f = 0$.

11.a) Considérons l'application linéaire ϕ de $\mathcal{F}_{N-2}$ dans $\mathcal{F}_N$ qui à g associe $r^2 g$. ϕ est injective donc $\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \mathcal{F}_{N-2}$. De plus $\operatorname{Im} \phi \cap \mathcal{H}_N = \{0\}$ d'après la question 10. donc $\dim \mathcal{H}_N \leqslant \dim \mathcal{F}_N - \dim \operatorname{Im} \phi = \dim \mathcal{F}_N - \dim \mathcal{F}_{N-2} = 2N+1$

b) Avec 9.a) on a $\boxed{\dim \mathcal{H}_N = 2N+1.}$

Quatrième Partie

12. Pour $0 \leqslant m \leqslant n$ on a successivement:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{n,m}(\theta, \varphi) &= -\cos m\varphi f'_{n,m}(\cos\theta) \sin\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Y_{n,m}(\theta, \varphi) &= -\cos m\varphi f'_{n,m}(\cos\theta) \cos\theta + \cos m\varphi f''_{n,m}(\cos\theta) \sin^2\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_{n,m}(\theta, \varphi) &= -m^2 \cos m\varphi f_{n,m}(\cos\theta)
\end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (E) de la fin de la deuxième partie on obtient

$$\boxed{\Delta_S Y_{n,m} = -n(n+1) Y_{n,m}}$$

Le cas $-n \leqslant m < 0$ est analogue.

13.a)

L'expression du laplacien en coordonnées sphériques et la relation ci dessus donne facilement $\widetilde{\Delta} \widetilde{H}_{n,m} = 0$

b) Remarque: L'expression " soit $H_{n,m}$ la fonction sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\widetilde{H}_{n,m}(r, \theta, \varphi) = r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ " est abusive. La donnée de $\widetilde{H}_{n,m}$ précise la valeur de $H_{n,m}$ sur $\mathbb{R}^3$ privé d'un demi-plan P. Il s'agit en fait de montrer l'existence d'une fonction $H_{n,m}$ polynômiale sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\widetilde{H}_{n,m}(r, \theta, \varphi) = r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi)$, ce polynôme étant homogène de degré n et harmonique.

Pour un tel polynôme, le résultat du a) et l'expression du laplacien en coordonnées sphériques assure qu'il est harmonique sur $\mathbb{R}^3 \setminus P$ donc sur $\mathbb{R}^3$ par continuité.

Détermination du polynôme:

- Cas: $m = 0$

$\widetilde{H}_{n,0} = r^n P_n(\cos\theta)$. P_n est un polynôme ayant même parité que n, on peut l'écrire $P_n = \displaystyle\sum_{2k \leqslant n} a_k X^{n-2k}$.

$\widetilde{H}_{n,0}$ devient: $\widetilde{H}_{n,0} = \displaystyle\sum_{2k \leqslant n} a_k r^{2k} (r \cos\theta)^{n-2k} = \sum_{2k \leqslant n} a_k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k x_3^{n-2k}$ ce qui est l'expression d'un polynôme homogène de degré n. On prendra $H_{n,0} = \displaystyle\sum_{2k \leqslant n} a_k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k x_3^{n-2k}$

- Cas: $0 < m \leqslant n$

On introduit $\widetilde{Z}_{n,m} = \widetilde{H}_{n,m} + i \widetilde{H}_{n,-m}$.

$\widetilde{Z}_{n,m} = r^n(e^{i\varphi})^m(\sin\theta)^m\dfrac{\partial^m P_n}{\partial x^m}(\cos\theta)$ Or $\dfrac{\partial^m P_n}{\partial x^m}$ est un polynôme de degré $n-m$ ayant la parité de $n-m$, il s'écrit $\dfrac{\partial^m P_n}{\partial x^m} = \displaystyle\sum_{2k\leqslant n-m} b_k X^{n-m-2k}$ et

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_{n,m} &= \sum_{2k\leqslant n-m} b_k r^n(e^{i\varphi}\sin\theta)^m(\cos\theta)^{n-m-2k}\\ &= \sum_{2k\leqslant n-m} b_k r^{2k}(re^{i\varphi}\sin\theta)^m(r\cos\theta)^{n-m-2k}\\ &= \sum_{2k\leqslant n-m} b_k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^k(x_1+ix_2)^m x_3^{n-m-2k}\end{aligned}$$

Parties réelle et imaginaire de $\widetilde{Z}_{n,m}$ donnent des polynômes homogènes de degré n que l'on prendra respectivement pour $H_{n,m}$ et $H_{n,-m}$.