

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

\*\*\*

Le but de ce problème est l'étude d'approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux extrémités de l'intervalle de définition.

**Première partie**

Soit  $n$  un entier fixé,  $n \geq 1$ . On note  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à  $n$  lignes, et  $I$  la matrice identité à  $n$  lignes. On note  $X_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , les coefficients d'une matrice  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On identifie un vecteur  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ , de composantes  $v_1, \dots, v_n$  dans la base canonique, à la matrice colonne  $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ . On désigne par  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne de  $\mathbf{R}^n$ .

1. Pour toute matrice  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , on pose

$$N(X) = \sup_{\substack{V \in \mathbf{R}^n \\ V \neq 0}} \left( \frac{\|XV\|}{\|V\|} \right).$$

a) Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

b) Montrer que, pour toutes matrices  $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,  $N(XY) \leq N(X)N(Y)$ .

Cette propriété est-elle vérifiée si l'on remplace la norme  $N$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  par la norme  $N_\infty$  définie par

$$N_\infty(X) = \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |X_{ij}| ?$$

2. Soit  $(X_p)_{p=1,2,\dots}$  une suite de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et  $X$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On suppose que  $X$  est inversible et que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} X_p = X$ .

a) Montrer que, pour  $p$  assez grand,  $X_p$  est inversible.

b) Soit  $V \in \mathbf{R}^n$ . Montrer que, si  $X_p$  est inversible,

$$\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\| \leq N(X^{-1})N(X - X_p)\|X_p^{-1}V\|.$$

En déduire qu'il existe un entier  $p_0$  et un nombre  $C$  indépendant de  $p$  tel que, pour  $p \geq p_0$ ,

$$\|X_p^{-1}V\| \leq C\|X^{-1}V\|.$$

c) Montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0$ .

**3.** On dit qu'une matrice  $X = (X_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  possède la propriété  $(P)$  si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} X_{ii} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n & (P_1) \\ X_{ij} \leq 0 & \text{pour tous } i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } i \neq j & (P_2) \\ \sum_{j=1}^n X_{ij} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n. & (P_3) \end{cases}$$

Soit  $X$  une matrice qui possède la propriété  $(P)$  et soit  $V \in \mathbf{R}^n$ , de composantes  $v_1, \dots, v_n$ .

a) Montrer que si  $XV = 0$ , alors  $V = 0$ . [On considérera  $i_0$  tel que  $|v_{i_0}| = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$ .]

b) On suppose que  $XV$  a toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer que  $V$  a toutes ses composantes positives ou nulles. [On considérera  $i_1$  tel que  $v_{i_1} = \min_{i=1, \dots, n} v_i$ .]

**4.** Soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On suppose que  $X$  est inversible et que  $X = \lim_{p \rightarrow +\infty} X_p$ , où chaque  $X_p$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  qui possède la propriété  $(P)$ . Montrer que les coefficients de la matrice inverse  $X^{-1}$  sont positifs ou nuls.

## Deuxième partie

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

**5.a)** Montrer qu'il existe une unique fonction  $u$  de classe  $C^4$  sur  $[0, 1]$  telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

b) Montrer que si  $f \geq 0$ , alors  $u \geq 0$ .

c) On choisit pour  $f$  la fonction constante égale à 1. Déterminer la solution  $\hat{u}$  du problème (1) dans ce cas.

Soit  $n$  un entier,  $n \geq 1$ . On pose  $h = \frac{1}{n+1}$  et l'on considère la subdivision  $(x_i)_{i=0,1,\dots,n+1}$  de l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = 1$  et  $x_{i+1} - x_i = h$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**6.a)** Soit  $u$  une fonction à valeurs réelles de classe  $C^4$  sur  $[0, 1]$ . Montrer que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|,$$

où  $u^{(4)}$  désigne la dérivée quatrième de  $u$ .

**b)** Que devient cette inégalité dans le cas où  $u$  est la fonction  $\hat{u}$  trouvée à la question **5.c)** ?

**7.** Soit  $F \in \mathbf{R}^n$ , de composantes  $f_1, \dots, f_n$ . On désigne par  $U$  un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ , de composantes  $u_1, \dots, u_n$  et l'on pose  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = 0$ .

**a)** Écrire sous forme matricielle  $AU = F$  le système (2) linéaire en les inconnues  $u_1, \dots, u_n$  :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

**b)** Montrer que, pour tout vecteur  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ , le produit scalaire canonique  $(AV|V)$  peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.

**c)** En déduire que la matrice  $A$  est inversible.

**8.a)** Soit  $B = A^{-1}$  l'inverse de  $A$ . Montrer que les coefficients  $B_{ij}$  de  $B$  sont positifs ou nuls.

**b)** Soit  $\hat{F}$  le vecteur de composantes toutes égales à 1. Déterminer les composantes de  $B\hat{F}$  à l'aide des valeurs de la fonction  $\hat{u}$  trouvée à la question **5.c)**. En déduire que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$0 \leq \sum_{j=1}^n B_{ij} \leq \frac{1}{8}.$$

**9.** On suppose que  $(u_1, \dots, u_n)$  est la solution du système (2) avec  $f_i = f(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et l'on désigne par  $u(x_1), \dots, u(x_n)$  les valeurs prises en  $x_1, \dots, x_n$  par la solution  $u$  du problème (1).

**a)** Donner une majoration de  $|u_i - u(x_i)|$ , valable pour tout  $i = 1, \dots, n$ , en fonction de  $h$  et de la fonction  $f''$ .

**b)** En quel sens peut-on dire que la solution du problème linéaire (2) avec  $f_i = f(x_i)$  approxime la solution du problème (1) ?

**c)** On choisit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{25}{\sqrt{x^4 + 5}}$ .

Trouver une valeur de l'entier  $n$  qui assure  $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

### Troisième partie

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$  comme dans la deuxième partie. Pour tout entier  $p \geq 1$ , on considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \frac{1}{p^2}u = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

**10.a)** Montrer que, pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe une unique fonction  $u^{[p]}$  de classe  $C^4$  sur  $[0, 1]$  qui est solution du problème (3).

**b)** Montrer que la suite de fonctions  $(u^{[p]})_{p \geq 1}$  tend simplement, quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , vers une fonction  $u$  de classe  $C^4$  sur  $[0, 1]$ , et que  $u$  est solution du problème (1) de la deuxième partie.

**11.** On choisit pour  $f$  la fonction constante égale à 1 et l'on note  $\hat{u}^{[p]}$  la solution du problème (3) dans ce cas.

**a)** Déterminer  $\hat{u}^{[p]}$ .

**b)** Pour tout entier  $p \geq 1$ , étudier les variations de la fonction  $x \in [0, 1] \mapsto \hat{u}^{[p]}(x) \in \mathbf{R}$ .

**c)** Montrer que, pour tout entier  $p \geq 1$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \hat{u}^{[p]}(x) < \frac{1}{8}$ .

**12.** On reprend les notations de la deuxième partie.

**a)** Montrer que pour chaque entier  $p \geq 1$ , le système linéaire

$$\left(A + \frac{1}{p^2}I\right)U = F \quad (4)$$

a une solution unique, notée  $U^{[p]}$ . Que peut-on dire de  $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^{[p]}$  ?

**b)** Soit  $(u_1^{[p]}, \dots, u_n^{[p]})$  la solution du système (4) avec  $f_i = f(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Donner une majoration de  $|u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)|$ , valable pour tout  $i = 1, \dots, n$ , en fonction de  $h$ ,  $p$ ,  $f$  et  $f''$ .

\* \*  
\*