

# Mines 2020 PC Maths 1 - Corrigé

## Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

### I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n > 0$ . Soit  $u \in \mathcal{N}(E)$ . On choisit une matrice carrée  $M$  représentant l'endomorphisme  $u$ .

1. "Démontrer" : commentaire avant la rédaction de ce sujet complètement inadapté à la section PC. Qu'attend ici le correcteur concernant un théorème du programme (toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable), énoncé dont la démonstration n'est pas exigible des candidats. Il est visible que ce sujet, pensé pour des MP n'a pas été correctement adapté pour les PC. Mais un tel thème est-il vraiment fait pour la section PC ?

$M$  matrice réelle est élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Elle est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure  $T$ . Les éléments diagonaux de  $T$ , triangulaire, sont ses valeurs propres, donc également les valeurs propres de  $M$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $M$ ,  $X$  un vecteur propre associé.  $MX = \lambda X$  et, de manière directe,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k X = \lambda^k X$ . Soit  $p$  l'indice de nilpotence de  $u$ .  $M^p$  représente  $u^p$  dans la base où  $M$  représente  $u$ . D'où  $M^p = 0$  et  $\lambda^p X = 0$ . Comme  $X$  est vecteur propre, donc non nul,  $\lambda^p = 0$  et  $\lambda = 0$ .

La seule valeur propre de  $M$ , donc de  $T$ , est 0 et  $T \in T_n^{++}$ .

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont chaque coefficient diagonal est le produit des deux coefficients diagonaux correspondants.  $T_n^{++}$  est stable pour le produit de matrice. En particulier  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $T^k \in T_n^{++}$ . Comme  $T^k$  est semblable à  $M^k$ ,  $\text{tr}(T^k) = \text{tr}(M^k) = \text{tr}(u^k) = 0$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . On note  $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure stricte.

2. L'application  $h$  qui à tout endomorphisme de  $E$  associe la matrice qui le représente dans  $\mathcal{B}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$  est l'image réciproque par cet isomorphisme de  $T_n^+(\mathbb{R})$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  de même dimension c.a.d.  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Soit l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par  $u(e_i) = e_{i-1}$  pour tout  $i \in [[2, n]]$ , et  $u(e_1) = 0$ . On vérifie facilement que pour tout  $k$  de  $[[0, n-1]]$ ,  $\text{Im}(u^k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k})$ . En particulier  $\text{Im} u^{n-1} = \text{Vect}(e_1)$  et  $\text{Im} u^n = \{0\}$ .  $u$  est de nilindice  $n$ .

3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , tels qu'il existe deux entiers  $p \geq q \geq 1$  vérifiant  $u^p(x) = u^q(y) = 0$  et  $u^{p-1}(x) \neq 0$  et  $u^{q-1}(y) \neq 0$ .

- o Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})$   $p$  réels tels que (1) :  $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ . Supposons qu'un des  $\alpha_i$  soit non nul et soit  $r$  le plus

petit des indices tels que  $\alpha_r \neq 0$ . La relation (1) s'écrit :  $\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ . Composons cette nouvelle relation par

$u^{p-1-r}$ . Comme  $u^k = 0$  si  $k \geq p$ , on obtient  $\alpha_r u^{r+p-1-r}(x) + 0 = 0$ .

$\alpha_r u^{p-1}(x) = 0$  donc  $\alpha_r = 0$ . Contradiction. Les  $\alpha_i$  sont tous nuls et la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre.

$(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est donc une base de  $\text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  qui est de dimension  $p$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $p \leq n$ .

- o Supposons que si  $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$  soit libre. Considérons  $p+q$  réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \beta_{q-1}$  tels que

$$(2) : \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0.$$

Supposons qu'il existe un des coefficients  $\alpha_i$  non nul et soit  $r$  le plus petit indice tel que  $\alpha_r \neq 0$ . Remarquons que les  $\beta_j$  ne peuvent être tous nuls car on aurait alors une combinaison linéaire non triviale des  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  égale

au vecteur nul. Notons  $s$  le plus petit des indices tel que  $\beta_j \neq 0$ . La relation (2) s'écrit :  $\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=s}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$ .

- o Composons la relation par  $u^{p-1-r}$ . On obtient  $\alpha_r u^{p-1}(x) + \sum_{j=s}^{q-1} u^{j+p-1-r}(y) = 0$ . Si de plus  $s+p-1-r \geq q$

alors  $\alpha_r u^{p-1}(x) = 0$  et  $\alpha_r = 0$  ce qui n'est pas.

- o On a donc  $s+p-1-r < q$ . Composons alors la relation par  $u^{q-1-s}$ .

Comme  $r+q-1-s > p-2$  on a deux cas

- o ou bien  $r+q-s \geq p$  et on obtient  $\beta_s u^{q-1}(y) = 0$  donc  $\beta_s = 0$ . Contradiction.

- o ou bien  $r+q-s = p$  et en composant par  $u^{p-1-r} = u^{q-1-s}$  on a  $\alpha_r u^{p-1}(x) + \beta_s u^{q-1}(y) = 0$ . Compte tenu de la liberté de  $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ ,  $\alpha_r = \beta_s = 0$  Contradiction.

Les réels  $\alpha_i$  sont donc tous nuls et compte tenu de la liberté de  $(y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$  les  $\beta_j$  aussi.

La famille étudiée est libre.

4. Soit  $u \in \mathcal{N}(E)$  de nilindice  $p$ . Comme  $u^{p-1} \neq 0$  il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$  et  $u^p(x) = 0$ . La famille  $(x, \dots, u^{p-1}(x))$  est une famille libre de  $p$  vecteurs de  $E$ . Donc  $p \leq \dim E = n$ .
- Si  $p = n$ ,  $(x, \dots, u^{p-1}(x))$  est une base de  $E$ . Notons cette base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour  $i \in [[1, n-1]]$ ,  $u(e_i) = e_{i+1}$  et  $u(e_n) = 0$ . On a donc facilement  $\text{Im } u = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$  et pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\text{Im } u^k = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ .  $u$  est de rang  $n-1$ ,  $\ker u$  est de dimension 1 et donc  $\ker u = \text{Vect}(e_n)$ . On a  $\ker u \subset \text{Im } u$  et donc  $\ker u \cap \text{Im } u = \ker u = \text{Vect}(e_n) = \text{Im } u^{n-1}$ , espace de dimension 1.
  - Si  $p = n-1$ ,  $(x, \dots, u^{p-1}(x))$  est une famille libre de  $n-1$  vecteurs de  $E$ . Les vecteurs  $(u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  forment une famille libre de  $\text{Im } u$  et donc le rang de  $u$  est supérieur ou égal à  $p-1 = n-2$ . Le noyau de  $u$  est de dimension inférieure ou égale à 2.
    - Si  $\dim(\ker u) = 1$ ,  $\ker u = \text{Vect}(u^{p-1}(x))$ . Comme  $p \geq 2$ ,  $u^{p-1}(x) \in \text{Im } u$  et  $\text{Im } u \cap \ker u = \ker u$  espace de dimension 1. Si  $\dim \text{Im } u^{p-1} \geq 2$  on pourrait trouver un vecteur  $y$  tel que  $(u^{p-1}(x), u^{p-1}(y))$  soit libre. Mais dans ce cas, comme  $u^p(y) = 0$ , le résultat de la question précédente nous donne une famille libre de  $2p = 2n-2$  de  $E$ . Or  $p = n-1 \geq 2$  donc  $2n-2 - n = n-2 \geq 1 > 0$ . Impossible. D'où  $\text{Im } u^{p-1} = \text{Vect } u^{p-1}(x)$  et on a l'égalité demandée.
    - Si  $\dim(\ker u) = 2$ . On choisit dans  $\ker u$  un vecteur  $y$  tel que la famille  $u^{p-1}(x), y$  soit libre. Mais  $u(y) = 0$ . D'après la question précédente la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y)$  est une base de  $E$ . Comme  $p \geq 2$  on obtient facilement encore les égalités demandées.

## II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien  $(E, (-|-))$ . Lorsque  $a$  désigne un vecteur de  $E$ , on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a|x). \end{cases}$$

5. Si  $F$  et  $G$  sont deux espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $p$ ,  $\mathcal{L}(F, G)$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  donc est de dimension  $n \times p$ . En particulier  $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim E \times 1 = \dim E$ .

Montrons déjà que pour tout  $a$  de  $E$ ,  $\varphi_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ . En effet  $\forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \varphi_a(x + \alpha y) = (a|x + \alpha y) = (a|x) + \alpha(a|y) = \varphi_a(x) + \alpha\varphi_a(y)$ .

Montrons ensuite que l'application  $a \mapsto \varphi_a$  est linéaire. Soient donc  $a, b$  deux vecteurs de  $E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\forall x \in E, \varphi_{a+\alpha b}(x) = (a + \alpha b|x) = (a|x) + \alpha(b|x) = \varphi_a(x) + \alpha\varphi_b(x) = (\varphi_a + \alpha\varphi_b)(x)$$

On a bien  $\varphi_{a+\alpha b} = \varphi_a + \alpha\varphi_b$ . L'application est linéaire.

Montrons qu'elle est injective :  $\varphi_a = 0 \Rightarrow \varphi_a(x) = (a|x) = 0 = \|a\|^2 \Rightarrow a = 0$ . Réciproque immédiate.

$\ker \varphi = \{0\}$ . Mais (théorème du rang),  $\dim \text{Im } \varphi + \dim \ker \varphi = \dim E$  (espace de départ).

D'où  $\dim \text{Im } \varphi = \dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ . Or si  $F, G$  sont des  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie et si  $\dim F = \dim G$  avec  $F \subset G$  alors  $F = G$ . Ce résultat s'applique ici et  $\text{Im } \varphi = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ .

L'application est linéaire, surjective et injective. On a un isomorphisme.

Étant donné  $a \in E$  et  $x \in E$  on notera désormais  $a \otimes x$  l'application de  $E$  dans lui même définie par :

$$\forall z \in E, (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. Soit  $x \in E \setminus \{0\}$ . L'application  $a \in E \mapsto a \otimes x$  est à valeurs dans  $\mathcal{L}(E)$ .

En effet  $\forall (z_1, z_2) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (a \otimes x)(z_1 + \alpha z_2) = (a|z_1 + \alpha z_2).x = (a|z_1).x + \alpha(a|z_2).x = (a \otimes x)(z_1) + \alpha(a \otimes x)(z_2)$ .

De manière claire  $\text{Im}(a \otimes x) \subset \text{Vect}(x)$ . Notons  $G = \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im } u \subset \text{Vect}(x)\}$ . On a, pour tout  $a$  de  $E$ ,  $(a \otimes x) \in G$ .

Réciproquement soit  $f$  un élément de  $G$ . Construisons une base orthonormale  $(e_1 = x/\|x\|, e_2, \dots, e_n)$ . Pour chaque  $i$ ,  $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1)$ . Notons pour chaque  $i$   $a'_i$ , le réel tel que  $f(e_i) = a'_i e_1$ .

Soit  $z$  un vecteur quelconque de  $E$ ,  $z = \sum_{i=1}^n z_i e_i$ .  $f(z) = \left( \sum_{i=1}^n a'_i z_i \right) e_1 = (a'|z) e_1$  avec  $a' = \sum_{i=1}^n a'_i e_i$ .

D'où  $\forall z \in E, f(z) = (a'|z).(x/\|x\|) = (a|z).x$  avec  $a = (1/\|x\|).a'$  et donc  $f = (a \otimes x)$ .

L'application est surjective.

On vérifie facilement qu'elle est linéaire. Elle est injective car, comme  $x \neq 0$ ,  $(a \otimes x) = 0 \Rightarrow \forall z \in E, (a|z) = 0 \Rightarrow a \in E^\perp = \{0\}$ . Réciproque immédiate.

L'application étudiée est une bijection linéaire de  $E$  sur  $\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im } u \subset \text{Vect}(x)\}$ .

7. Soit  $a \in E$  et  $x \in E \setminus \{0\}$ . Considérons la matrice de cette application dans une base  $(x, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  ( $n = \dim E$ ). Cette matrice a tous les coefficients des lignes 2 à  $n$  qui sont nuls. La trace de cette matrice est donc la première coordonnée dans cette base de  $(a \otimes x)(x) = (a|x).x$ . D'où  $\text{tr}(a \otimes x) = (a|x)$ .

### III. Deux lemmes

On considère ici un espace euclidien  $(E, (-|-))$  de dimension  $n > 0$ . On rappelle que l'on a démontré à la question 4 que le nilindice d'un élément de  $\mathcal{N}(E)$  est toujours inférieur ou égal à  $n$ . Soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace vectoriel nilpotent de  $\mathcal{L}(E)$  contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} v(u)$$

appelé nilindice générique de  $\mathcal{V}$ . On a donc  $p \geq 2$ .

On introduit le sous-ensemble  $\mathcal{V}^*$  formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles  $\text{Im}u^{p-1}$  pour  $u$  dans  $\mathcal{V}$ ; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$\mathcal{K}(\mathcal{V}) := \text{Vect}(\mathcal{V}^*).$$

Enfin, étant donné  $x \in E$ , on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

**Lemme C.** Soit  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{V}$ . Alors  $\text{tr}(u^k v) = 0$  pour tout entier naturel  $k$ .

**Lemme D.** Soit  $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ . Si  $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ , alors  $v(x) = 0$  pour tout  $v \in \mathcal{V}$ .

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{V}$ .

8. Étudions l'existence.

Montrons par récurrence sur  $k$  la propriété demandée.

◦  $k = 1$  ( $u + tv$ ) =  $u + tv$  et  $f_0^{(1)} = u = u^1$  et  $f_1^{(1)} = v = u^0 v u^{1-1-0}$ . La propriété est vraie.

◦ Supposons la propriété vraie pour un entier  $k$  strictement positif donné. On peut alors écrire :

$$(u + tv)^{k+1} = (u + tv) \circ \left( \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} \right) = \sum_{i=0}^k t^i u f_i^{(k)} + \sum_{i=0}^k t^{i+1} v f_i^{(k)} = u f_0^{(k)} + \sum_{i=1}^k t^i (u f_i^{(k)} + v f_{i-1}^{(k)}) + t^{k+1} v f_k^{(k)}$$

On obtient une écriture polynomiale demandée avec des endomorphismes et de plus ici (la notation est abusive mais sera justifiée par la démonstration de l'unicité)  $f_0^{(k+1)} = u f_0^{(k)} = u u^k = u^{k+1}$  et

$$f_1^{(k+1)} = u f_1^{(k)} + v f_0^{(k)} = u \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} + v u^k = \sum_{i=0}^{k-1} u^{i+1} v u^{k-1-i} + v u^k = \sum_{j=1}^k u^j v u^{k-1-j+1} + v u^k = \sum_{j=0}^k u^j v u^{k-j}$$

La propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

Pour l'unicité, si on avait deux écritures polynomiales de ce type on aurait, en prenant les matrices qui représentent

ces matrices dans une base donnée de  $E$  une égalité du type  $\sum_{i=0}^k t^i P_i^{(k)} = \sum_{i=0}^k t^i Q_i^{(k)}$ .

Soit  $n = \dim(E)$  et  $(x, y) \in [[1, n]]^2$ . En notant  $M[x, y]$  le coefficient général de chaque matrice on obtient pour tout  $t$  réel :

$$\sum_{i=0}^k t^i P_i^{(k)}(x, y) = \sum_{i=0}^k t^i Q_i^{(k)}(x, y). \text{ Par unicité de l'écriture d'un polynôme réel on a donc pour chaque } i :$$

$P_i^{(k)}(x, y) = Q_i^{(k)}(x, y)$ . Ceci est vrai pour  $x, y$  quelconques donc  $P_i^{(k)} = Q_i^{(k)}$  ce qui assure à  $k$  donné l'unicité de l'écriture.

9. Comme  $\mathcal{V}$  est un espace vectoriel,  $u + tv \in \mathcal{V}$ . Par définition son nilindice est inférieur ou égal au nilindice générique de  $\mathcal{V}$  égal à  $p$ . D'où  $(u + tv)^p = 0$  et donc par unicité de l'écriture de la question précédente, pour tout  $i$ ,  $f_i^{(p)} = 0$ . En

particulier  $f_1^{(p)} = 0$  c.a.d.  $f_1^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$ .

10. Comme  $u + tv$  est nilpotent, d'après le résultat de la question 1,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}((u + tv)^k) = 0$ .

En utilisant la linéarité de la trace, pour tout  $t$ , tout  $k$ ,  $0 = \sum_{i=0}^k t^i \text{tr}(f_i^{(k)}) = 0$ . On a un polynôme réel nul. Tous ses

coefficients sont nuls et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall i \in [[0, k]]$ ,  $\text{tr}(f_i^{(k)}) = 0$ .

En particulier  $\forall k_i n_N$ ,  $\text{tr}(f_1^{(k+1)}) = 0$ . mais pour des endomorphismes quelconques  $a, b$   $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$ .

On obtient  $0 = \text{tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^k \text{tr}(u^i v u^{k-i}) = \sum_{i=0}^k \text{tr}(u^k v) = (k + 1) \text{tr}(u^k v)$ .

Le lemme C est démontré.

11. Soit  $y \in E$  et  $a \in \mathcal{K}(\mathcal{V})^\perp$ .

Pour tout  $t$ ,  $u + tv \in \mathcal{V}$  et donc  $(u + tv)^{p-1}(y) \in \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}(\mathcal{V})$ . La fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto (a|(u + tv)^{p-1}(y))$  est donc la fonction nulle.

C'est une fonction polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Le coefficient du terme de degré 1 est  $(a|f_1^{(p-1)}(y))$  est nul.

$f_1^{(p-1)}(y)$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $\mathcal{K}(\mathcal{V})^\perp$ . Il appartient donc à l'orthogonal de cet espace qui est (nous sommes en dimension finie)  $\mathcal{K}(\mathcal{V})$ .

On a vu que  $f_1^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^i v u^{p-2-i}$  et  $u f_1^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} = \sum_{j=1}^{p-1} u^j v u^{p-1-j} = f_1^{(p)} - u^0 v u^{p-1}$

D'après le résultat de la question 9 on a donc :  $u f_1^{(p-1)} = -v u^{p-1}$ .

Soit donc  $x \in \text{Im } u^{p-1}$ . Il existe un vecteur  $y$  de  $E$  tel que  $x = u^{p-1}(y)$  et  $v(u^{p-1}(y)) = u(f_1^{(p-1)}(-y)) \in u(\mathcal{K}(\mathcal{V}))$ .

12. Soit  $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$  tel que  $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ .

Il existe (par définition de  $\mathcal{V}^*$ )  $u \in \mathcal{V}$  tel que  $x \in \text{Im } u^{p-1}$ .

Soit  $y \in K(\mathcal{V})$ .

◦  $y = 0.x + u^0(y)$  avec  $y \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$

◦ Par hypothèse  $y \in \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ . Il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathcal{V}$  tels que  $y = \lambda_0.x + v(x)$ . D'après la question 11,  $v(x) \in u(\mathcal{K}(\mathcal{V}))$ . Il existe  $y_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$  tel que  $v(x) = u(y_1)$ .

On a alors  $y = \lambda_1.x + u(y_1)$  avec  $y_1 \in K(\mathcal{V})$ .

◦ Supposons la propriété vraie pour  $k \geq 1$ . On peut appliquer le résultat 1 à  $y_k$  et  $y_k = \mu.x + u(z)$  Comme  $x \in \text{Im } u^{p-1}$ ,  $u(x) = u^p(?) = 0$  et  $u^k(y_k) = 0 + u^{k+1}(z)$ . La propriété est vraie au rang  $k+1$ . De plus  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ .

En particulier, comme  $u^p = 0$ ,  $y = \lambda_1.x + 0$ .  $y \in \text{Vect}(x)$ .

On a donc  $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$ .

D'après la question 11  $v(x) \in u(\mathcal{K}(v))$ . Il existe un élément  $y$  de  $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$  tel que  $v(x) = u(y) = u(\alpha x)$  pour un certain réel  $\alpha$ . Mais  $x \in \text{Im } u^{p-1}$  donc  $u(x) = u^p(-) = 0$ .

On obtient  $v(x) = 0$  et ce pour tout  $v \in \mathcal{V}$ .

Le lemme **D** est démontré.

## IV. Démonstration du théorème B

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème **B** par récurrence sur l'entier  $n$ . Le cas  $n = 1$  est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel  $n \geq 2$  et on suppose que pour tout espace vectoriel réel  $E'$  de dimension  $n-1$  et tout sous-espace vectoriel nilpotent  $\mathcal{V}'$  de  $\mathcal{L}(E')$  de dimension  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ , il existe une base de  $E'$  dans laquelle tout élément de  $\mathcal{V}'$  est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$ , ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{L}(E)$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ . On munit  $E$  d'un produit scalaire  $(-|-)$ , ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire  $x$  de  $E \setminus \{0\}$ . On pose

$$H := \text{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}.$$

On note  $\pi$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $H$ . Pour  $u \in \mathcal{W}$ , on note  $\bar{u}$  l'endomorphisme de  $H$  défini par

$$\forall z \in H, \bar{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\bar{\mathcal{V}} := \{\bar{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad Z := \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\}.$$

13. Soit  $x$  fixé dans  $E$ . L'application  $h_1 : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto v(x)$  est linéaire.  $\mathcal{V}$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$ , donc  $\mathcal{V}x = h_1(\mathcal{V})$  est un sev de  $E$ .  $\mathcal{W} = \ker h_1 \cap \mathcal{V}$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$ .

On montre de même que l'application  $h_2$  qui à  $u$  associe  $\bar{u}$  est linéaire de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{L}(H)$ .  $\bar{\mathcal{V}} = h_2(\mathcal{W})$  est donc un sev de  $\mathcal{L}(H)$ .  $Z = \ker h_2 \cap \mathcal{W}$  est un sev de  $\mathcal{V}$ .

14. Appliquons le théorème du rang à la restriction de  $h_1$ , notée  $\tilde{h}_1$  à  $\mathcal{V}$ .  $\text{Im } \tilde{h}_1 = \mathcal{V}x$  et  $\ker \tilde{h}_1 = \ker h_1 \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$ .

Comme tous ces espaces sont de dimension finie  $\dim \mathcal{V}x + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$ .

De même en prenant la restriction de  $h_2$  à  $\mathcal{W}$ .  $\dim \mathcal{W} = \dim \bar{\mathcal{V}} + \dim Z$

Finalement :

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(Z) + \dim \bar{\mathcal{V}}.$$

15. L'application  $\psi : a \mapsto a \otimes x$  est une bijection de  $E$  dans  $G = \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im } u \subset \text{Vect}(x)\}$  (question 6).

Soit  $u$  dans  $Z$ .  $u \in \mathcal{W}$  donc  $u(x) = 0$ .

De plus  $\forall z \in H, \pi(u(z)) = \bar{u}(z) = 0$ .

Enfin tout vecteur  $y$  de  $E$  s'écrit de manière unique  $y = y_1 + y'$  avec  $y \in H$  et  $y' \in \text{Vect}(x)$ .  $u(y) = u(y_1) + 0$  et  $\pi(u(y)) = \pi(u(y_1)) = \bar{u}(y_1) = 0$ . Donc  $u(y) \in \ker \pi = H^\perp = \text{Vect}(x)$ .

On vient de montrer que  $\text{Im } u \subset \text{Vect}(x)$  et donc  $u \in G$ .  $Z$  est un sev de  $G$ . Son image réciproque par  $\psi$  est un sev de  $E$  de même dimension. Notons le  $L$ . On a :

$$Z = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim Z.$$

Pour tout  $a$  de  $L$ ,  $a \otimes x$  est dans  $Z$  donc  $a \otimes x(x) = 0 = (a|x).x$ . Comme  $x \neq 0$ ,  $(a|x) = 0$ .

$x$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $L$ .  $x \in L^\perp$ .

16. Soit  $u \in \mathcal{V}$  et  $a \in L$ .  $a \otimes x \in Z \subset \mathcal{V}$ . Soit  $v \in \mathcal{V}$ .

$\text{Im}(a \otimes x) \subset \text{Vect}(x)$  donc  $\text{Im}(a \otimes x) \circ v$  est au plus de dimension 1.

$(a \otimes x) \circ v : z \mapsto (a \otimes x)(v(z)) = (a|v(z)).x$ . Cette application est de rang au maximum 1. Sa matrice dans une base dont le premier vecteur est  $x$  est une matrice dont toutes les lignes sont nulles à partir de la deuxième. Sa trace est donc la composante sur  $x$  de l'image de  $x$  par cette application. Or  $(a \otimes x)(v(x)) = (a|v(x)).x$  Par suite  $\text{tr}(a \otimes x) \circ v = (a|v(x))$  Mais cette trace est nulle d'après le lemme **C**.

$v(x)$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $L$ ,  $v(x) \in L^\perp$ , ceci pour tout  $v$  de  $\mathcal{V}$ .

On a bien  $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ .

Le raisonnement est identique en utilisant la trace de  $z \mapsto (a \otimes x)(u^k(z))(a|u^k(z)).x$ . Cette trace est nulle (lemme **C**) et vaut  $(a|u^k(x))$ . Par suite  $u^k(x) \in L^\perp$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $u \in \mathcal{V}$ .

17. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Si  $\lambda x \in \mathcal{V}x$  on aurait  $v(x) = \lambda x$  pour un certain  $v$  de  $\mathcal{V}$ . Comme  $x \neq 0$ ,  $\lambda$  serait valeur propre de  $v$ . Comme  $v$  est nilpotent sa seule valeur propre est 0. Contradiction.

On sait que  $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ . Mais cette inclusion est stricte car  $x \notin \mathcal{V}x$  et  $x \in L^\perp$ .

Donc  $\dim \mathcal{V}x < \dim L^\perp = n - \dim(L)$ . Comme on a des entiers,  $\dim \mathcal{V}x \leq \dim L^\perp - 1 = n - \dim(L) - 1$ . On a bien

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit  $u \in \mathcal{W}$ . Soit  $z$  dans  $H$ . Montrons par récurrence sur  $k$  que  $(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$

◦ pour  $k = 0$ , évident car  $(\bar{u})^0(z) = z = \pi(u^0(z)) = \pi(z) = z$  car  $z \in H$ .

◦ Supposons que pour un entier  $k$  donné,  $(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ .

Comme  $E = \text{Vect}(x) \oplus H$  il existe  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  et  $y_k \in H$  tels que  $u^k(z) = \lambda_k x + y_k$ . ( $y_k = \pi(u^k(z))$ )

Mais  $u(x) = 0$  donc  $u^{k+1}(z) = u(y_k)$ .

Mais  $(\bar{u})^{k+1}(z) = \bar{u}(\pi(u^k(z))) = \bar{u}(y_k) = \pi(u(y_k)) = \pi(u^{k+1}(z))$

La propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .

Comme  $u^p = 0$  on en déduit que  $\forall z \in H, \forall u \in \mathcal{W}, (\bar{u})^p(z) = \pi(u^p(z)) = \pi(0) = 0$ .

Les éléments de  $\bar{\mathcal{V}}$  sont tous nilpotents, d'indice de nilpotence au plus égal à  $p$ .

$\bar{\mathcal{V}}$  est un sous-espace vectoriel nilpotent de  $\mathcal{L}(H)$ .

19.  $x \neq 0$ ,  $\text{Vect}(x)$  est de dimension 1 et son orthogonal,  $H$ , de dimension  $n - 1$ .

$\bar{\mathcal{V}}$  est un sous-espace vectoriel nilpotent de  $\mathcal{L}(H)$ . D'après le théorème **A** il est de dimension maximum  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

De plus d'après les questions 14-15,  $\dim \bar{\mathcal{V}} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{V}x - \dim L = \frac{n(n-1)}{2} - (\dim \mathcal{V}x + \dim L)$

En utilisant l'inégalité démontrée en question 17 :  $\dim \bar{\mathcal{V}} \geq \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

Par double inégalité :  $\dim \bar{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

De plus on obtient alors  $\dim \mathcal{V}x + \dim L = n - 1$ . On a vu que  $\mathcal{V}x \cap \text{Vect}(x) = \{0\}$ . Ces deux espaces sont en somme directe et donc  $\dim(\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)) = \dim \mathcal{V}x + \dim(\text{Vect}(x)) = \dim \mathcal{V}x + 1$ .

D'après les égalités précédentes  $\dim(\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)) = n - \dim(L) = \dim(L^\perp)$ . Or on a vu que  $\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x) \subset L^\perp$ . On a donc

$$L^\perp = \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

Enfin d'après la question 16,  $v^k(x) \in L^\perp$  pour tout  $v \in \mathcal{V}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , donc  $v^k(x) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ .

20.  $\bar{\mathcal{V}}$  est un sous-espace nilpotent de  $\mathcal{L}(H)$  de dimension  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence

du théorème **B**. Il existe une base  $\mathcal{B}_1$  de  $H$  où tous les éléments de  $\bar{\mathcal{V}}$  sont représentés par une matrice triangulaire supérieure. L'application  $\psi$  qui à un endomorphisme de  $H$  associe sa matrice dans  $\mathcal{B}_1$  est un isomorphisme.  $\psi(\bar{\mathcal{V}}) \subset$

$T_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$  et est donc de même dimension  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . Ces deux espaces sont égaux.

En particulier il y a dans  $\bar{\mathcal{V}}$  un endomorphisme de matrice vue en question 2, donc de nilindice égal à  $n - 1$ . D'après la question 18,  $n - 1 \leq p$ .

Comme  $E = \text{Vect}(x) \oplus H$  une base adaptée à cette somme directe est  $\mathcal{B}_2$  obtenue en ajoutant à  $x$  les vecteurs de  $\mathcal{B}_1$ .

Supposons que  $\mathcal{V}x = \{0\}$ . Pour tout  $v$  de  $\mathcal{V}$ ,  $v(x) = 0$ . La matrice de  $v$  dans  $\text{mathcal{B}}_2$  a une première colonne remplie de 0. Pour  $v$  donné notons par blocs  $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(v) = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ (0) & M_1 \end{pmatrix}$ .  $M_1$  est la matrice qui représente  $\overline{v}$  dans  $\text{mathcal{B}}_1$ . Elle est triangulaire supérieure et donc  $M$  aussi.

On a ainsi construit une base de  $E$  dans laquelle tout élément de  $\mathcal{V}$  est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte-tenu du résultat de la question 20, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur  $x$  de telle sorte que  $\mathcal{V}x = \{0\}$ .

On choisit  $x$  dans  $\mathcal{V}^* \setminus \{0\}$  (l'ensemble  $\mathcal{V}^*$  a été défini dans la partie III). On note  $p$  le nilindice générique de  $\mathcal{V}$ , et l'on fixe  $u \in \mathcal{V}$  tel que  $x \in \text{Im } u^{p-1}$ . On rappelle que  $p \geq n - 1$  d'après la question 20.

21. Soit  $v \in \mathcal{V}$  tel que  $v(x) \neq 0$ . Le nilindice de  $v$  est supérieur ou égal à 2. Donc  $p \geq 2$ ; de plus  $p \geq n - 1$ . On a  $v^p = 0$ .
- Si  $v^{p-1} = 0$ ,  $\text{Im } v^{p-1} = \{0\} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ .
  - Si  $v^{p-1} \neq 0$ ,  $v$  est de nilindice  $p$  et toutes les hypothèses de la question 4 sont vérifiées. On peut conclure que  $\text{Im } v^{p-1} = \text{Im } v \cap \ker v$  est de dimension 1.  
 $v(x) \neq 0$  mais  $v^p(x) = 0$ . On peut considérer le plus petit entier  $k$  tel que  $v^k(x) \neq 0$  et  $v^{k+1}(x) = 0$ . On a  $k \geq 1$  donc  $v^k(x) \in \text{Im } v$  et par construction,  $v^k(x) \in \ker v$ .  $v^k(x)$  est donc un vecteur directeur de  $\text{Im } v \cap \ker v$  qui est de dimension 1.  
 Mais d'après la question 19 ce vecteur est élément de  $\text{Vect } x \oplus \mathcal{V}x$ .  
 On a donc encore dans ce deuxième cas  $\text{Im } v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$
22. Supposons qu'il existe  $v_0 \in \mathcal{V}$  tel que  $v_0(x) \neq 0$ . Soit  $v \in \mathcal{V}$ . Si  $v(x) \neq 0$ , la question précédente a montré que  $\text{Im } v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ .  
 Si  $v(x) = 0$ , utilisons  $v + tv_0$  pour  $t$  réel. Si  $t$  non nul,  $(v + tv_0)(x) = tv_0(x) \neq 0$ . Comme  $v + tv_0 \in \mathcal{V}$ , d'après la question 21,  $\text{Im}(v + tv_0)^{p-1} \subset \mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)$ .  
 Pour tout vecteur  $a \in (\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x))^\perp$ , tout  $z$  de  $E$ , tout  $t$  non nul,  $(a|(v + tv_0)^{p-1}(z)) = 0$ .  
 Or, en effectuant un développement comme en question 8, pour  $a$  fixé,  $t \mapsto (a|(v + tv_0)^{p-1}(z))$  est une fonction polynomiale nulle sur  $\mathbb{R}^*$ . Elle est donc nulle pour  $t = 0$  et donc  $(a|v^{p-1}(z)) = 0$ . Ce pour tout  $z$ . On obtient  $\text{Im } v^{p-1} \subset ((\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x))^\perp)^\perp = \mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)$
23. Si les conditions de la question 22 sont réalisées,  $\mathcal{V}^* = \cup_{v \in \mathcal{V}} \text{Im } v^{p-1} \subset \mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)$ . Et comme le plus grand ensemble est un sev,  $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)$ .  
 Mais les hypothèses de la question 12 sont réunies et donc  $v(x) = 0$  pour tout  $x$  de  $\mathcal{V}$ .  
 Contradiction car  $v_0(x) \neq 0$ .  
 Par suite  $\mathcal{V}x = \{0\}$  et la démonstration de la question 20 a permis de démontrer le théorème.

*On nous demande de conclure : comme à la bataille d'Austerlitz le soleil s'est levé tout en fin de problème, les difficultés ont été surmontées. Le correcteur y a passé bien plus de trois heures. Les concepteurs, correcteurs du sujet peuvent, comme Napoléon être fiers de leur joli problème bataille. Comme dans une bataille théorique, celle-ci est bien adaptée à de bons régiments commandos. La bataille d'Austerlitz a dû faire 20 000 morts environ. Ce sujet là - posé rappelons dans la filière PC - en a fait toute proportion gardée autant. Napoléon peut dormir tranquille.*

FIN DU PROBLÈME