Mines Ponts 2019 - PC Maths I (3 heures)

I . Généralités, cas particuliers

1. Notons $a_n = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$\frac{\left|a_{n+1}z^{n+1}\right|}{|a_n z^n|} = \frac{(p\,(n+1))^r}{[p\,(n+1)]!}\frac{(pn)!}{(pn)^r}|z| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{|z|}{(pn+1)\,(pn+2)\cdots(pn+p)}$$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = 0 < 1$ et, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Le rayon de la série entière $\sum a_n z^n$ est donc $+\infty$. La deuxième série entière (lacunaire et dont le coefficient n'est pas le précédent) converge donc aussi pour tout $z \in \mathbb{C}$ et son rayon de convergence est donc $+\infty$.

2. Les énoncés $\mathcal{H}_{0,1}$ et $\mathcal{H}_{0,2}$ sont vrais car :
$$S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x = \frac{1}{1}x^0 e^x \quad \text{et} \quad S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = ch\,(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}x^0 e^x$$

II . Une démonstration probabiliste de $\mathrm{H}_{r,1}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Sous réserve d'existence, l'espérance de $(Z_x)^r$ est, avec le théorème de transfert :
$$\mathbf{E}\left((Z_x)^r\right) = \mathbf{E}\left(\left(\frac{X_x}{x}\right)^r\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{x}\right)^r \mathbb{P}(X_x = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{x}\right)^r e^{-x}\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=1}^{+\infty} n^r \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x)$$
On a vu au passage une série absolument convergente (d'après la question **1**) donc cette espérance existe bien.

4. • L'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre "λ" $= x > 0$ sont : $\mathbf{E}(X_x) = \mathbf{V}(X_x) = x$.
Par linéarité de l'espérance il vient $\mathbf{E}(Z_x) = \frac{1}{x}\mathbf{E}(X_x) = 1$ et suivant la formule "$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$" il vient $\mathbf{V}(Z_x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{V}(X_x) = \frac{1}{x}$.
• Comme Z_x est une *v.a.r.* admettant une variance, l'**inégalité de Bienaymé-Tchebichev** donne, pour $\varepsilon = x^{-\frac{1}{3}}$: $\mathbb{P}\left(|Z_x - E(Z_x)| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \dfrac{V(Z_x)}{x^{-\frac{2}{3}}}$ et donc $\mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

5. • Pour $x > 1$ le réel $a = \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r$ est strictement positif et la *v.a.r.* $(Z_x)^r$ admet une espérance d'après **3°)**. L'inégalité de Markov donne alors : $\mathbb{P}\left((Z_x)^r \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}((Z_x)^r)}{a}$. Or $t \mapsto t^r$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $r > 0$) donc : $\left((Z_x)^r \geqslant a\right) = \left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)$ et il vient bien, en multipliant par le réel positif a :
$$\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \geqslant \mathbf{E}\left((Z_x)^r\right)$$
• On a déjà $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r = 1$ et on a par ailleurs $\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \subset \left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right)$ donc, avec la croissance de $\mathbb{P}$ et la question **4** :
$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \longrightarrow 0$$
En passant au complémentaire : $\mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \longrightarrow 1$ et le produit tend encore vers 1 :
$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1$$

6. A nouveau, l'espérance de $Y_{x,N}$ existe (la série qui suit est bien AC), car avec le théorème de transfert :
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_{x,N}) &= \mathbf{E}\left(X_x(X_x - 1)\cdots(X_x - N + 1)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-N+1)\,\mathbb{P}(X_x = n) \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-N+1)\,e^{-x}\frac{x^n}{n!} = x^N e^{-x}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{x^{n-N}}{(n-N)!} = x^N\end{aligned}$$

7. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, la famille $(H_j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ est échelonnée en degré ($\deg H_j = j$) et de cardinal $N+1$ dans $\mathbb{R}_N[T]$ qui est de dimension $N+1$. C'est donc une base de cet espace vectoriel et le polynôme T^N (l'indéterminée est T ici) se décompose en $T^N = \sum_{k=0}^{N} a_k H_k$ pour un unique $(a_0, \cdots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Comme $N \geqslant 1$ on a par évaluation en 0 : $0 = a_0$ et aussi $a_N = 1$ (coefficient dominant) donc

$$T^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k \quad \text{et} \quad a_N = 1$$

Alors il vient pour tout $x > 0$: $(X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k (X_x) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}$. Ensuite, la linéarité de l'espérance et la question **6** (puisque tous les indices k sont $\geqslant 1$) donnent :

$$\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}\mathbf{E}\left((X_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k \mathbf{E}(Y_{x,k}) \overset{6^\circ)}{=} \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k$$

En conséquence : $\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^N} \times a_N x^N = a_N = 1$.

8. • Soit $N = \lfloor r \rfloor$, $s = r - N \in [0,1[$. On peut étudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $t \mapsto s(t-1) + 1 - t^s$ mais appliquons plutôt le TAF à la fonction $f : t \mapsto t^s$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ cette fonction est continue "$[1,t]$" et dérivable sur "$]1,t[$". Il existe donc $c = c_t \in$ "$]1,t[$" tel que

$$t^s - 1 = (t-1) f'(c) = s c^{s-1} (t-1)$$

Remarquons que, puisque $s - 1 < 0$, $t \mapsto t^{s-1}$ est décroissante et :

- si $t = 1$ la majoration est triviale.
- si $t > 1$ alors $1 < c < t$ donc $c^{s-1} < 1$ et comme $s(t-1) > 0$: $t^s - 1 \leqslant s \times 1 \times (t^s - 1)$
- si $0 < t < 1$ alors $t < c < 1$ donc $c^{s-1} > 1$ et comme $s(t-1) < 0$ on a encore $t^s - 1 \leqslant s c^{s-1}(t-1) < s(t-1)$.
CQFD.

• On a alors, avec $t = Z_x$: $(Z_x)^r = (Z_x)^N \times (Z_x)^s \leqslant (Z_x)^N [s(Z_x - 1) + 1] = (s-1)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

9. La minoration de la question **5** et la linéarité de l'espérance donnent :

$$p(x) = \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \leqslant \mathbf{E}((Z_x)^r) \leqslant (s-1)\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) + s\mathbf{E}\left((Z_x)^{N+1}\right) = q(x)$$

On a vu à la question **5** que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = 1$ et de plus N étant fixé dans $\mathbb{N}^*$ la question **7** donne $\lim_{x \to +\infty} q(x) = (s-1) \times 1 + s \times 1 = 1$. Par pincement on obtient alors $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{E}((Z_x)^r) = 1$.

III . Démonstration de $\mathrm{H}_{r,p}$ pour $p \geqslant 2$

10. • Soit $x > 0$. La fonction $\varphi_x : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto t^{1-r}(t-1)^r - x$ est de classe C^1 et pour tout $t \geqslant 1$:

$$\varphi_x'(t) = (1-r) t^{-r}(t-1)^r + r t^{1-t}(t-1)^{r-1} = t^{-r}(t-1)^{r-1}(t + r - 1) > 0 \text{ si } t \neq 1$$

Ainsi φ_x est une bijection continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[\varphi_x(1), \lim_{t \to +\infty} \varphi_x(t)[= [-x, +\infty[$. Comme $-x < 0$ la fonction φ_x s'annule une unique fois, en un réel $t_x > 1$ qui est donc tel que :

$$\forall t \in [1, t_x[\quad \varphi_x(t) < 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [t_x, +\infty[\quad \varphi_x(t) > 0$$

• On a alors pour $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = \frac{n^r}{n!} x^n - \frac{(n-1)^r}{(n-1)!} x^{n-1} = -\frac{n^r}{n!} x^{n-1}\left[n^{1-r}(n-1)^r - x\right] - \frac{n^r}{n!} x^{n-1} \varphi_x(n)$$

et donc pour $n \leqslant \lfloor t_x \rfloor$ $u_n(x) - u_{n-1}(x) \geqslant 0$ et pour $n \geqslant \lfloor t_x \rfloor + 1$ $u_n(x) - u_{n-1}(x) \leqslant 0$, ce qui donne le résultat annoncé.

11. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r$ puisque :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x^{1-r+r}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right] \\
&= x\left[\left(1+\frac{\alpha(1-r)}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{(\alpha-1)r}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1\right] \\
&= x\left[\frac{\alpha-r}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \alpha - r + o(1)
\end{aligned}$$

Montrons alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} t_x - x - r = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour $\alpha = r+\varepsilon$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_x(x+r+\varepsilon) = \varepsilon > 0$ et il existe donc $x^+ > 0$ tel que : $\forall x \geqslant x^+ \ \varphi_x(x+r+\varepsilon) > 0$.

Les variations de φ_x donne alors :

$$\forall x \geqslant x^+ \qquad t_x < x + r + \varepsilon$$

- De même avec $\alpha = r - \varepsilon$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_x(x+r-\varepsilon) = -\varepsilon < 0$ et il existe donc $x^- > 0$ tel que : $\forall x \geqslant x^- \ \varphi_x(x+r+\varepsilon) < 0$ et alors :

$$\forall x \geqslant x^- \qquad x + r - \varepsilon < t_x$$

En posant $x_0 = \max(x^+, x^-)$ il vient : $\forall x \geqslant x_0 \quad -\varepsilon < t_x - x - r < \varepsilon$. CQFD.

12. Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé. Pour x assez grand on a $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{N}$ et (avec $\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x$)

$$\begin{aligned}
\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} &= \frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^{\lfloor x \rfloor + k} \times \frac{\lfloor x \rfloor !}{\lfloor x \rfloor^r x^{\lfloor x \rfloor}} \\
&= \left(\frac{\lfloor x \rfloor + k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \times \frac{x^k}{(\lfloor x \rfloor + k)(\lfloor x \rfloor + k - 1)\cdots(\lfloor x \rfloor + 1)} \underset{+\infty}{\sim} 1
\end{aligned}$$

13. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après ce qui précède :

$$\frac{\sum\limits_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \frac{\sum\limits_{k=-m}^{0} u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \sum_{k=-m}^{0} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} \longrightarrow m+1$$

et donc pour x assez grand ce quotient est supérieur ou égal à m. CQFD.

Soit donc $x_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant x_1 \quad u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} i^r \frac{x^i}{i!}$$

Pour les indices i de cette somme on a $i^r \leqslant \lfloor x \rfloor^r \leqslant x^r$ et les termes sommés sont positifs donc :

$$\forall x \geqslant x_1 \quad u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \leqslant \frac{x^r}{m} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{m}$$

14. • *Première étape :* Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{x^r e^x} = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, notons $m = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, de sorte que $\frac{2}{\varepsilon} \leqslant m$ et $\frac{2}{m} \leqslant \varepsilon$.

La question **12** donne $a > 0$ tel que : $\forall x \geqslant a \ \ u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \leqslant 2u_{\lfloor x \rfloor}(x)$

La question **13** donne pour cet m là l'existence de $A > a > 0$ tel que : $\forall x \geqslant A \ \ 0 \leqslant u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r e^x}{m}$ et finalement :

$$\forall x \geqslant A \ \ 0 \leqslant u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \leqslant 2u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant 2\frac{x^r e^x}{m} \leqslant \varepsilon x^r e^x \qquad \text{CQFD}$$

• *Deuxième étape (indiquée par l'énoncé).*

La question **11** donne $B > 0$ tel que $\forall x \geqslant B \quad -1 < t_x - x - r < 1$ et donc, puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor r \rfloor \leqslant r < \lfloor r \rfloor + 1$ il vient :

$$\forall x \geqslant B \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \leqslant t_x < \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 3$$

Comme les bornes de l'encadrement sont des entiers, on en déduit que :

$$(1) \quad \forall x \geqslant B \quad \lfloor t_x \rfloor = \lfloor x \rfloor + i_x \quad \text{avec } i_x \in I = \{\lfloor r \rfloor - 1,\ \lfloor r \rfloor,\ \lfloor r \rfloor + 1,\ \lfloor r \rfloor + 2\}$$

Remarquons que ce "i" de l'énoncé *dépend* a priori de x mais que l'ensemble I est fixe et fini.

• *Troisième étape :* Montrons enfin que $M_x = o_{x\to+\infty}(x^r e^x)$.

Notons d'abord que, d'après la question **10** on a : $M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$.

La première étape de cette question donne, pour tout $k \in I \subset \mathbb{Z}$ (de cardinal 4) un réel "A" $= A_k > 0$ tel que :

$$(2_k) \qquad \forall x \geqslant A_k \quad u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \leqslant \varepsilon x^r e^x$$

Si on pose $A_\varepsilon = \max\left(A_{\lfloor r \rfloor - 1}, A_{\lfloor r \rfloor}, A_{\lfloor r \rfloor + 1}, A_{\lfloor r \rfloor + 2}, B\right)$ on a alors :

$$\forall x \geqslant A_\varepsilon \quad 0 \leqslant M_x \leqslant \varepsilon x^r e^x$$

En effet pour un tel $x \geqslant A_\varepsilon$ la propriété (1) donne que $M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) = u_{\lfloor x \rfloor + i_x}(x)$ avec $k = i_x \in I$ et (2_k) donne alors $u_{\lfloor x \rfloor + i_x}(x) \leqslant \varepsilon x^r e^x$. CQFD.

15. Pour $z \in \mathbb{Z}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$ on a $D_n = \frac{1-z^n}{1-z}$ et donc $|D_n| \leqslant \frac{1+|z^n|}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |D_n u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \frac{n^r}{n!} |x|^n$$

Or on a vu à la question **1**, pour $p = 1$, que la série entière $\sum \frac{n^r}{n!} z^n$ est de rayon infini , donc la série majorante est convergente et, par majoration de séries à termes positifs, $\sum |D_n u_n(x)|$ converge.

De même $|D_n u_{n-1}(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \frac{(n-1)^r}{(n-1)!} |x|^{n-1}$ permet de conclure que $\sum |D_n u_{n-1}(x)|$ converge.

16. • Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on a (transformation d'Abel) en notant u_n pour $u_n(x)$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} D_n(u_{n-1} - u_n) = \sum_{n=1}^{N} D_n u_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} D_{n+1} u_n - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} (D_{n+1} - D_n) u_n + D_1 u_0 - D_N u_N = \sum_{n=1}^{N-1} z^n u_n + 0 - D_N \frac{N^r}{N!} x^N \end{aligned}$$

D'après la question **15** la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente en tant que somme partielle d'une série (absolument) convergente et de plus $\left|D_N \frac{N^r}{N!} x^N\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \left|\frac{N^r}{N!} x^N\right| \longrightarrow 0$ (puisque la série correspondante converge). En passant à la limite quand $N \to +\infty$ on obtient (si $x \in \mathbb{R}$ et $|z| = 1$, $z \neq 1$) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (zx)^n = S_{r,1}(zx)$$

• Comme les séries $\sum D_n u_n(x)$ et $\sum D_n u_{n-1}(x)$ sont absolument convergentes on peut appliquer l'inégalité triangulaire généralisée. Elle donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|S_{r,1}(zx)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n| |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|$$

On connaît le signe de $u_{n-1}(x) - u_n(x)$ grâce à la question **10** . Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} |S_{r,1}(zx)| &\leqslant \frac{2}{|1-z|} \left\{ \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right\} \\ &\leqslant \frac{2}{|1-z|} \left\{ \left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - \underbrace{u_0(x)}_{0} \right) + \left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - 0\right) \right\} = \frac{4u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)}{|1-z|} \leqslant \frac{4M_x}{|1-z|} \end{aligned}$$

Comme on a vu en question **14** que $M_x = o_{x\to+\infty}(x^r e^x)$ il vient, par cette majoration, que

$$|S_{r,1}(zx)| = o_{x\to+\infty}(x^r e^x)$$

17. • Soit alors $p \geqslant 2$ et $\xi = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. On a pour tout réel x :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\xi^k x\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}\left(\xi^k x\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \sum_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k$$

Or si n est multiple de p on a $\sum\limits_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k = p$ et sinon $\sum\limits_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k = \frac{1-(\xi^n)^p}{1-\xi^n} = 0$. Il ne reste donc dans la somme que les indices multiples de p , les pj, $j \in \mathbb{N}^*$ et donc :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\xi^k x\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(pj)^r}{(pj)!} x^{pj} \times p = pS_{r,p}(x)$$

• Faisons alors le quotient par $x^r e^x$, en isolant le terme pour $k = 0$:

$$px^{-r}e^{-x}\ S_{r,p}(x) = x^{-r}e^{-x}S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} x^{-r}e^{-x}S_{r,1}\left(\xi^k x\right)$$

Or pour $k \in \{1, \cdots, p-1\}$ le nombre complexe $z = \xi^k$ est de module 1 et différent de 1 donc la question **16** donne $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-r}e^{-x}S_{r,1}\left(\xi^k x\right) = 0$ et la propriété $\mathcal{H}_{r,1}$ (prouvée en **9**) donne $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-r}e^{-x}S_{r,1}(x) = 1$. Finalement, puisque le nombre de termes de la somme est constant : $\lim\limits_{x\to+\infty} px^{-r}e^{-x}\ S_{r,p}(x) = 1$. CQFD.

IV . Application à une équation différentielle

18. *Analyse* : Supposons que f existe telle que dans l'énoncé et écrivons

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

On a $c_1 = f(0) = 1$ et l'équation différentielle (E) vérifiée par f donne $c_0 = f(0) = 0$. De plus, d'après le cours sur les séries entières, on peut dériver 2 fois terme à terme $f(t)$ et (E) donne alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0$$

ce qui donne après arrangements (sachant que $c_0 = 0$) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n(n+1)c_{n+1} - c_n\right] t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle il vient

$$c_0 = 0 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} c_n$$

et, sachant que $c_1 = 1$, on prouve par récurrence sur $\mathbb{N}$ que : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad c_n = \frac{1}{n!(n-1)!}}$

Synthèse : La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n!(n-1)!}$ a bien un rayon de convergence infini (aisé ...), sa somme f vérifie (E) (en repensant les calculs, puisque les coefficients ont été choisis pour annuler $n(n+1)c_{n+1} - c_n$) et de plus $f'(0) = c_1 = 1$.

19. Utilisons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$:

$$(2n)!\ c_n = \frac{n(2n)!}{[n!]^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}\ n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}} = \frac{4^n\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

CQFD.

20. Les hypothèse du lemme étant présentes on a, en notant $b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n$:

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Or pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)^{\frac{1}{2}}}{(2n)!} 4^n t^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)^{\frac{1}{2}}}{(2n)!} \left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{\frac{1}{2},2}\left(2\sqrt{t}\right)$$

et, puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} 2\sqrt{t} = +\infty$, la propriété $\mathcal{H}_{\frac{1}{2},2}$ donne enfin par compostion :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2}\left(2\sqrt{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{t}} = \frac{t^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{2\sqrt{t}}$$

FIN