Concours Mines/ Ponts – 2018 – PC/PSI Maths 1

Un corrigé

A Coefficients binomiaux

1. • L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \{0, ..., n\} & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \binom{n}{k} \end{array} \right.$ est à valeurs strictement positives. Pour tout $k \in \left\{0, .., \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\}$:

$$\varphi(k+1) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{n-k}{k+1} = \varphi(k)\,\frac{n-k}{k+1}.$$

Or $\dfrac{n-k}{k+1} \geq \dfrac{n - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} > \dfrac{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \geq 1$, par conséquent $\boxed{\varphi \text{ est (strictement) croissante sur } \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}}$.

• Il est alors immédiat que pour tout $k \in \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$: $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Lorsque $k \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, ..., n\right\}$,

$n - k$ est inférieur ou égal à $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, donc inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, il s'ensuit que

l'on a encore $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$: $\boxed{\text{pour tout } k \in \{0, ..., n\},\ \binom{n}{k} \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$.

2. Le plus simple est de discuter suivant la parité de n :

• Si n est pair, on pose $n = 2k$, et l'on a $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{2k}{k} = \dfrac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{(2k)^{2k}\, e^{-2k} \sqrt{4\pi k}}{\left(k^k\, e^{-k} \sqrt{2\pi k}\right)^2}$

D'après la formule de Stirling, $\dfrac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{(2k)^{2k}\, e^{-2k} \sqrt{4\pi k}}{\left(k^k\, e^{-k} \sqrt{2\pi k}\right)^2} = \dfrac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}$, d'où :

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \text{ pair}}}{\sim} \frac{2^n \sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}.$$

• Pour n impair, $n = 2k + 1$: $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{2k+1}{k} = \binom{2k}{k}\dfrac{2k+1}{k+1}$, donc d'après ce qui précède,

$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \dfrac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}\,.\,2$, soit $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \dfrac{2^n}{\sqrt{\pi \frac{n-1}{2}}}$, on a donc également $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \text{ impair}}}{\sim} \dfrac{2^n \sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$.

Finalement :

$$\boxed{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.\,\frac{2^n}{\sqrt{n}}}.$$

Comme $\sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1$, on en déduit que $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ est inférieur à $\frac{2^n}{\sqrt{n}}$ à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\text{il existe un entier } n_0 \text{ tel que pour tout } n \geq n_0, \ \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \quad (1)}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, .., n\}$. Si $k = 0$, $\binom{n}{k} 2^{k-1} \leq n^k$ est l'évidence : $\frac{1}{2} \leq 1$. Si $k \geq 1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} ... \frac{n-k+1}{k} 2^{k-1} \leq n . \left(\frac{n}{2}\right)^{k-1} 2^{k-1} = n^k}.$$

4. • Il est immédiat que, pour tout $i \in \{1, .., n\}$: $\boxed{\mathrm{e}_i = \frac{1}{2}\left(v - \left(v - 2\,\mathrm{e}_i\right)\right)}$.

• Le vecteur v appartient à $\Omega_{1,n}$, puisque toutes ses coordonnées valent 1. Toutes les coordonnées de $v - 2\,\mathrm{e}_i$ sont égales à 1, sauf celle d'indice i, qui vaut -1, ainsi $v - 2\,\mathrm{e}_i$ appartient lui aussi à $\Omega_{1,n}$; il découle alors de ce qui précède que pour tout $i \in \{1, .., n\}$, $\mathrm{e}_i \in \mathrm{Vect}\left(\Omega_{1,n}\right)$. On en déduit que

$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}_i,\ i \in \{1, ..., n\}\right) \subset \mathrm{Vect}\left(\Omega_{1,n}\right)$, soit : $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Vect}\left(\Omega_{1,n}\right)$. L'inclusion réciproque étant évidente :

$\boxed{\mathrm{Vect}\left(\Omega_{1,n}\right) = \mathbb{R}^n}$.

B Dimension 2

5. On a $\det\left(M^{(2)}\right) = M_{1,1} M_{2,2} - M_{1,2} M_{2,1}$, d'où par linéarité de l'espérance,

$\mathbf{E}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(M_{1,1} M_{2,2}\right) - \mathbf{E}\left(M_{1,2} M_{2,1}\right)$, puis, par indépendance des variables aléatoires $M_{i,j}$,

$\mathbf{E}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(M_{1,1}\right)\mathbf{E}\left(M_{2,2}\right) - \mathbf{E}\left(M_{1,2}\right)\mathbf{E}\left(M_{2,1}\right)$.

Mais pour tout i, j, $\mathbf{E}\left(M_{i,j}\right) = 1 . \mathbf{P}\left(M_{i,j} = 1\right) + (-1)\,\mathbf{P}\left(M_{i,j} = -1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. On en conclut que

$\boxed{\mathbf{E}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = 0}$.

6. La variance de $\det\left(M^{(2)}\right)$ est donnée par : $\mathbf{V}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\left(\det\left(M^{(2)}\right) - \mathbf{E}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right)\right)^2\right)$, d'où

d'après **Q5.**, $\mathbf{V}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right)^2\right)$.

On a $\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right)^2 = M_{1,1}^2 M_{2,2}^2 + M_{1,2}^2 M_{2,1}^2 - 2\,M_{1,1} M_{2,2} M_{1,2} M_{2,1}$. Les variables aléatoires $M_{i,j}$ étant à valeurs dans $\{-1, 1\}$, leurs carrés sont des des variables certaines égales à 1, donc

$\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right)^2 = 2 - 2\,M_{1,1} M_{2,2} M_{1,2} M_{2,1}$. Il en résulte que

$\mathbf{V}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = 2 - 2\,\mathbf{E}\left(M_{1,1} M_{2,2} M_{1,2} M_{2,1}\right)$, puis, à nouveau par indépendance, que

$$\mathbf{V}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = 2 - 2\underbrace{\mathbf{E}\left(M_{1,1}\right)}_{=0}\mathbf{E}\left(M_{2,2}\right)\mathbf{E}\left(M_{2,1}\right)\mathbf{E}\left(M_{1,2}\right).$$

On obtient comme désiré : $\boxed{\mathbf{V}\left(\det\left(M^{(2)}\right)\right) = 2}$.

Remarque

Il n'est pas très difficile de montrer que de manière générale : $\mathbf{E}\left(\det\left(M^{(n)}\right)\right) = 0$ et $\mathbf{V}\left(\det\left(M^{(n)}\right)\right) = n\,!$.

7. Le déterminant de $M^{(2)}$ est égal à 0 si et seulement si ses deux lignes $L_1^{(2)}$ et $L_2^{(2)}$ sont liées, donc, puisque tout le monde est à coefficients dans $\{-1, 1\}$, si et seulement si $L_1^{(2)}$ et $L_2^{(2)}$ sont égales ou opposées :

$\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(2)}\right) = 0\right) = \mathbf{P}\left(\left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)}\right) \cup \left(L_2^{(n)} = -L_1^{(n)}\right)\right)$, et par incompatibilité :

$\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(2)}\right) = 0\right) = \mathbf{P}\left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)}\right) + \mathbf{P}\left(L_2^{(n)} = -L_1^{(n)}\right)$, ou encore, puisque $L_2^{(n)}$ et $-L_2^{(n)}$ suivent la même loi et sont indépendantes de $L_1^{(n)}$: $\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(2)}\right) = 0\right) = 2\,\mathbf{P}\left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)}\right)$.

On a donc $\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(2)}\right) = 0\right) = 2\,\mathbf{P}\left(\left(M_{2,1} = M_{1,1}\right) \cap \left(M_{2,2} = M_{1,2}\right)\right)$, puis par indépendance :

$\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(2)}\right) = 0\right) = 2\,\mathbf{P}\left(M_{2,1} = M_{1,1}\right)\mathbf{P}\left(M_{2,2} = M_{1,2}\right)$.

Il est relativement immédiat que $\mathbf{P}\left(M_{2,1} = M_{1,1}\right) = \mathbf{P}\left(M_{2,2} = M_{1,2}\right) = \dfrac{1}{2}$, d'où finalement

$\boxed{\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(2)}\right) = 0\right) = \dfrac{1}{2}}$.

C Quelques bornes

8. Notons E_n l'événement : « $L_2^{(n)} = \pm L_1^{(n)}$ ». Comme en **Q7.**, on a $\mathbf{P}\left(E_n\right) = 2\,\mathbf{P}\left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)}\right)$, d'où :

$$\mathbf{P}\left(E_n\right) = 2\,\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left(M_{2,j} = M_{1,j}\right)\right) = 2\prod_{j=1}^{n}\mathbf{P}\left(M_{2,j} = M_{1,j}\right) \quad \text{(par indépendance).}$$

A nouveau, $\mathbf{P}\left(M_{2,j} = M_{1,j}\right) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$. Donc $\boxed{\mathbf{P}\left(E_n\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

Si les deux premières lignes de $M^{(n)}$ sont égales ou opposées, son déterminant est nul : $E_n \subset \left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right)$,

d'où $\boxed{\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(E_n\right) = 2^{1-n}}$ (si $n \geq 2$).

9. S'il existe $j \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $l_{j+1} \in \operatorname{Vect}\left(\left\{l_1, ..., l_j\right\}\right)$, les vecteurs $l_1, ..., l_n$ sont évidemment liés.

Réciproquement, supposons la famille $\left(l_1, ..., l_n\right)$ liée. Il existe alors n réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$ non tous nuls et tels que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k l_k = 0$. Soit j le plus grand entier de $\{0, ..., n-1\}$ tel que $\alpha_{j+1} \neq 0$ (un tel j existe !). On a $\sum_{k=1}^{j+1}\alpha_k l_k = 0$; de plus, j n'est pas égal à 0 (sinon, on aurait $\alpha_1 l_1 = 0$ avec $\alpha_1 \neq 0$ et $l_1 \neq 0$, bizarre).

Donc $j \in \{1, ..., n-1\}$, et, comme $\alpha_{j+1} \neq 0$, l'égalité $\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k l_k = 0$ peut s'écrire $l_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} -\frac{\alpha_k}{\alpha_{j+1}} l_k$.

Ceci assure que $l_{j+1} \in \mathrm{Vect}\left(\{l_1, ..., l_j\}\right)$, et achève d'établir l'équivalence demandée.

Les vecteurs aléatoires $L_1^{(n)}, ..., L_n^{(n)}$ ne s'annulant pas, on peut appliquer ce qui précède, et en déduire que

$$\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) = \mathbf{P}\left(\left(\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right) \text{ est une famille liée}\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right)\right),$$

d'où par propriété de sous-additivité (ou inégalité de Boole) :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) \qquad (2)}$$

10. Soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-d})$ une base de $\mathcal{H}^\perp$. Pour tout $i \in \{1, ..., n-d\}$, on écrit ε_i dans la base canonique $(\mathrm{e}_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, sous la forme : $\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \mathrm{e}_j = (\alpha_{i,1}, ..., \alpha_{i,n})$.

soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur x appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si il appartient à $\left(\mathcal{H}^\perp\right)^\perp$, donc si et seulement si : $\forall\ i \in \{1, ..., n-d\}$, $\langle x, \varepsilon_i \rangle = 0$. Or $\langle x, \varepsilon_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \cdots & \alpha_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\boxed{x \in \mathcal{H} \text{ si et seulement si : } \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \cdots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$.

11. La famille $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-d})$, base de $\mathcal{H}^\perp$, est de rang $n-d$. La matrice $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \cdots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix}$ est donc elle aussi de rang $n-d$ (c'est la transposée de la matrice des coordonnées de la famille $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-d})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$). On sait alors que le système $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \cdots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est équivalent (par lignes) à un système $R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, où $R \in \mathcal{M}_{n-d,n}(\mathbb{R})$ est échelonnée, réduite par lignes et de rang $n-d$. La matrice R possède donc exactement d colonnes, d'indices $1 \leq i_1 < ... < i_d \leq n$, sur lesquelles ne se trouve pas de coefficient pivot.

$x_{i_1}, ..., x_{i_d}$ sont les inconnues secondaires du système ; on sait alors que, pour tout $(y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $x = (x_1, ..., x_n)$ vérifiant $x_{i_1} = y_1, ..., x_{i_d} = y_d$. Etre solution du système, c'est appartenir à $\mathcal{H}$, par conséquent :

$\boxed{\text{Pour tout } (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d, \text{ il existe un unique } x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{H} \text{ tel que } x_{i_k} = y_k \text{ pour } k = 1, ..., d}$.

12. • D'après **Q11.** : il existe des indices $1 \leq i_1 < ... < i_d \leq n$ vérifiant :

pour tout $y \in \Omega_{1,d}$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left\{ L_1^{(n)} \in \mathcal{H}, L_{1,i_1}^{(n)} = y_1, ..., L_{1,i_d}^{(n)} = y_d \right\} = \left\{ L_1^{(n)} = x \right\}$.

Cet évènement a pour probabilité 2^{-n} si $x \in \Omega_{1,n}$, et 0 sinon. Par sommation sur les 2^d éléments du système complet d'événements : $\left(\left\{ L_1^{(n)} \in H, L_{1,i_1}^{(n)} = y_1, ..., L_{1,i_d}^{(n)} = y_d \right\} \right)_{y \in \Omega_{1,d}}$, on en déduit que :

$\boxed{\mathbf{P}\left(L_1^{(n)} \in \mathcal{H} \right) \leq 2^{d-n}}$.

• Ce qui est vrai pour $L_1^{(n)}$ est également vrai pour tout $L_{j+1}^{(n)}$, $j = 1, ..., n-1$: $\mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathcal{H} \right) \leq 2^{d-n}$.

En utilisant la formule des probabilités totales indiquée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \operatorname{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)} \right) \right) \\
&= \sum_{l_1, ..., l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \operatorname{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)} \right) \mid L_1^{(n)} = l_1, ..., L_j^{(n)} = l_j \right) \times \mathbf{P}\left(L_1^{(n)} = l_1, ..., L_j^{(n)} = l_j \right) \\
&= \sum_{l_1, ..., l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \operatorname{Vect}\left(l_1, ..., l_j \right) \right) \times 2^{-nj},
\end{aligned}$$

et, comme $\operatorname{Vect}\left(l_1, ..., l_j \right)$ est de dimension inférieure ou égale à j, on obtient :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \operatorname{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)} \right) \right) \leq \sum_{l_1, ..., l_j \in \Omega_{1,n}} 2^{j-n} \times 2^{-nj} = 2^{j-n}}.$$

13. On a $\dim\left(\left(\operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^{\perp} \right) = n - \dim\left(\operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right) \geq n - q > 0$, il existe donc déjà des vecteurs non nuls appartenant à $\left(\operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^{\perp}$. Pour $i \in \{1, ..., q\}$, notons $l_i = \left(l_{i,1}, ..., l_{i,n} \right)$. Pour tout $x = \left(x_1, ..., x_n \right) \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in \left(\operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., q\}, \left\langle x, l_i = 0 \right\rangle \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., q\}, \sum_{j=1}^{n} x_j l_{i,j} = 0 .$$

Ce système est à coefficients dans $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Q}$; il est équivalent à un système échelonné et réduit par lignes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Si l'on choisit les inconnues secondaires dans $\mathbb{Q}$ et non toutes nulles, on obtient donc une solution $x = \left(x_1, ..., x_n \right)$ de ce système (donc un élément de $\left(\operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^{\perp}$), non nul et à coordonnées dans $\mathbb{Q}$.

Posons pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $x_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, avec $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}^*$. Alors le vecteur $\left(\prod_{i=1}^{n} q_i \right) x$ est non nul, à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, et c'est un élément de $\left(\operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^{\perp}$:

$\boxed{\text{Il existe un vecteur non nul, orthogonal à } \operatorname{Vect}\left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \text{, et qui est à coordonnées dans } \mathbb{Z}}$.

D Théorème de Erdös-Littlewood-Offord

14. On sait que, si l'on considère deux ensembles finis de même cardinal, dire que l'un de ces deux ensembles est inclus dans l'autre, revient à dire que ces deux ensembles sont égaux. Tous les éléments de $\mathcal{A}_k$ étant de même cardinal k, deux éléments distincts quelconques de $\mathcal{A}_k$ sont donc incomparables : $\mathcal{A}_k$ est une anti-chaîne.

De plus, le cardinal de $\mathcal{A}_k$ est égal à $\binom{n}{k}$, d'où d'après **Q1.** : $\boxed{\left|\mathcal{A}_k\right| \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$, et d'après **Q2.** : $\boxed{\text{il existe un entier } n_0}$

$\boxed{\text{tel que si } n \geq n_0,\ \left|\mathcal{A}_k\right| \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}}$.

15. Les ensembles $\{1, ..., |A|\}$ et A étant de même cardinal $|A|$, il existe $(|A|)!$ bijections de $\{1, ..., |A|\}$ dans A.

De même, il existe $(n - |A|)!$ bijections de $\{|A| + 1, ..., n\}$ dans A^c.

Construire un élément σ de $\mathcal{S}_A$ revient à choisir une bijection de $\{1, ..., |A|\}$ dans A et une bijection de $\{|A| + 1, ..., n\}$ dans A^c, donc : $\boxed{\text{le cardinal de } \mathcal{S}_A \text{ est égal à } (|A|)!(n - |A|)!}$.

16. Quitte à échanger les rôles de A et B, on peut supposer que $|A| \leq |B|$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B$ est non vide. Soit σ un élément de cette intersection. σ appartient à $\mathcal{S}_B$, donc réalise une bijection de $\{1, ..., |B|\}$ dans B : $B = \{\sigma(1), ..., \sigma(|B|)\}$. De même, $A = \{\sigma(1), ..., \sigma(|A|)\}$, et comme $|A| \leq |B|$, on a finalement $A = \{\sigma(1), ..., \sigma(|A|)\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(|B|)\} = B$: A et B sont comparables. Ceci est absurde, puisque A et B sont distincts, et que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne. Ceci prouve que $\boxed{\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B = \varnothing}$.

17. Les ensembles $\mathcal{S}_A$, $A \in \mathcal{A}$, sont deux à deux disjoints, donc : $\left|\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{S}_A\right| = \sum_{A \in \mathcal{A}} \left|\mathcal{S}_A\right|$, ce que l'on peut également écrire sous la forme : $\left|\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{S}_A\right| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| = k}} \left|\mathcal{S}_A\right|$. On a donc, en utilisant le résultat de **Q.15.** :

$$\left|\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{S}_A\right| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| = k}} (|A|)!(n - |A|)! = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| = k}} k!(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, k!(n-k)!.$$

Or $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{S}_A$ est un sous-ensemble de l'ensemble des bijections de $\{1, ..., n\}$ dans lui-même, qui est de cardinal $n!$. Ainsi $\left|\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{S}_A\right| \leq n!$, d'où $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, k!(n-k)! \leq n!$, et, en divisant par $n!$, on obtient : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1}$.

18. On a $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$, donc $\frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$, d'où d'après **Q1.**, $\frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}}$. On déduit alors du résultat de **Q17.** que $\frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$, d'où $\boxed{|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$.

19. Par hypothèse, l'ensemble A est strictement inclus dans l'ensemble B. On peut donc noter $A = \{i_1, ..., i_p\}$ et

$B = \{i_1, ..., i_q\}$, avec $p < q$, et des i_j deux à deux distincts. Alors :

$s_B = \sum_{k=1}^{q} v_{i_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, ..., i_q\}}}^{n} v_j = 2\sum_{k=1}^{q} v_{i_k} - \sum_{j=1}^{n} v_j$. de même, $s_A = 2\sum_{k=1}^{p} v_{i_k} - \sum_{j=1}^{n} v_j$. On a donc

$\boxed{s_B - s_A = 2\sum_{k=p+1}^{q} v_{i_k} \geq 2}$, car $\{p+1, ..., q\}$ est non vide, et pour tout $k \in \{p+1, ..., q\}$, $v_{i_k} \geq 1$.

20. On lira avec intérêt le rapport du jury, pour savoir combien de candidats ont répondu correctement à cette question !

Posons $\Theta_{J,n} = \{\omega \in \Omega_{1,n}, \langle \omega, v\rangle \in J\} = \left\{\omega \in \Omega_{1,n}, \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i = 1}}^{n} v_i - \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i = -1}}^{n} v_i \in J\right\}$. Soit

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \Omega_{1,n} & \to & \mathcal{P}(\{1, ..., n\}) \\ \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) & \mapsto & \{i \in \{1, ..., n\}, \omega_i = 1\} \end{array} \right. .$$

Il est clair que φ est une bijection : sa bijection réciproque est

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\{1, ..., n\}) & \to & \Omega_{1,n} \\ A \subset \{1, ..., n\} & \mapsto & \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \text{ défini par } \omega_i = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in A \\ -1 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Posons ensuite $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\}), \psi(A) \in \Theta_{J,n}\}$; on a donc :

$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\}), \sum_{\substack{i=1 \\ i \in A}}^{n} v_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin A}}^{n} v_i \in J\right\}$, soit : $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\}), s_A \in J\}$.

Montrons que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$ distincts. Puisque s_A et s_B sont dans J, intervalle ouvert de longueur 2 : $|s_A - s_B| < 2$. D'après **Q19.**, A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A : $\mathcal{A}$ est bien une anti-chaîne.

Puisque $\Omega_{1,n}$ est muni de la mesure de probabilité uniforme, $\mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v\right\rangle \in J\right) = \frac{|\Theta_{J,n}|}{|\Omega_{1,n}|} = 2^{-n}|\Theta_{J,n}|$, d'où par bijectivité de φ, $\mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v\right\rangle \in J\right) = 2^{-n}|\mathcal{A}|$. Comme $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne, d'après **Q18.** : $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et, d'après **Q.2.**, $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ pour n assez grand. Par suite, $\boxed{\mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v\right\rangle \in J\right) = 2^{-n}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$, la deuxième inégalité ayant lieu pour n assez grand.

Si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $|v_j| \geq 1$, on considère le vecteur aléatoire $L = (L_1, ..., L_n)$, où pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $L_j = \begin{cases} M_{1,j} & \text{si } v_j \geq 0 \\ -M_{1,j} & \text{sinon} \end{cases}$. On pose également $w = (|v_1|, ..., |v_n|)$.

L suit la même loi que $L_1^{(n)}$ et toutes les coordonnées de w sont supérieures ou égales à 1, donc d'après ce qui précède,

$\mathbf{P}\left(\left\langle L, w\right\rangle \in J\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour n assez grand. Les produits scalaires $\left\langle L, w\right\rangle$ et $\left\langle L_1^{(n)}, v\right\rangle$ étant égaux,

$\boxed{\text{l'inégalité } \mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v\right\rangle \in J\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \text{ reste vraie pour } n \text{ assez grand.}}$

E Universalité

Il est curieux que l'énoncé se mette à noter $\left(\omega_{1,1}, ..., \omega_{1,n}\right)$ l'élément ω de $\Omega_{1,n}$ (qui, rappelons-le, a été identifié à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$). On continuera dans ce corrigé à utiliser plus simplement la notation $\left(\omega_1, ..., \omega_n\right)$.

21. L'énoncé semble également confondre $\Omega_{1,k}$ et $\Omega_{1,n}$. On suppose qu'il s'agit de montrer que :

$$\left\{\left\{L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)}\right\} \text{ non } k-\text{universel}\right\} \subset \bigcup_{\substack{\left(j_1, ..., j_k\right) \in \{1, ..., n\}^k \\ j_1 < ... < j_k}} \ \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \ \bigcap_{i=1}^{d} \ \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}.$$

On va prouver qu'il y a en fait égalité. En passant à la négation de la définition d'un ensemble k – universel :
le sous-ensemble V de $\Omega_{1,n}$ est non k – universel si et seulement si il existe un k – uplet $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$, et il existe $\theta \in \Omega_{1,n}$, tels que pour tout $v \in \mathrm{V}$: il existe $m \in \{1, ..., k\}$ tel que $v_{j_m} \neq \theta_{j_m}$.

Autrement dit, en posant $\omega = \left(\theta_{j_1}, ..., \theta_{j_k}\right) \in \Omega_{1,k}$:

V est non k – universel si et seulement si il existe un k – uplet $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$, et il existe $\omega \in \Omega_{1,d}$, tels que pour tout $v \in \mathrm{V}$: il existe $m \in \{1, ..., k\}$ tel que $v_{j_m} \neq \omega_m$.

On prend $\mathrm{V} = \left\{L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)}\right\}$. La traduction ensembliste de « pour tout » est une intersection, celle de « il existe » une réunion, et l'on obtient :

$$\left\{\left\{L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)}\right\} \text{ non } k-\text{universel}\right\} = \bigcup_{\substack{\left(j_1, ..., j_k\right) \in \{1, ..., n\}^k \\ j_1 < ... < j_k}} \ \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \ \bigcap_{i=1}^{d} \ \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}.$$

22. Par propriété de sous-additivité, d'après le résultat de la question précédente :

$$\mathbf{P}\left(\left\{L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)}\right\} \text{ non } k-\text{universel}\right) \leq \sum_{\substack{\left(j_1, ..., j_k\right) \in \{1, ..., n\}^k \\ j_1 < ... < j_k}} \ \sum_{\omega \in \Omega_{1,k}} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}\right).$$

Or, dans cette inégalité : $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}\right) = \prod_{i=1}^{d} \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}\right)$ (par indépendance),

d'où $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}\right) = \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} = \omega_m\right\}\right)\right)$, puis, à nouveau par indépendance :

$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}\right) = \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \prod_{m=1}^{k} \mathbf{P}\left(M_{i, j_m} = \omega_m\right)\right)$. Pour tout i et pour tout m,

$\mathbf{P}\left(M_{i, j_m} = \omega_m\right)$ vaut $\dfrac{1}{2}$, ainsi $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \left\{M_{i, j_m} \neq \omega_m\right\}\right) = \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \prod_{m=1}^{k} \dfrac{1}{2}\right) = \left(1 - 2^{-k}\right)^d$, et :

$$\mathbf{P}\left(\left\{L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)}\right\} \text{ non } k-\text{universel}\right) \leq \left(1 - 2^{-k}\right)^d \sum_{\substack{\left(j_1, ..., j_k\right) \in \{1, ..., n\}^k \\ j_1 < ... < j_k}} \ \sum_{\omega \in \Omega_{1,k}} 1 .$$

On a $\displaystyle\sum_{\substack{(j_1, ..., j_k) \in \{1, ..., n\}^k \\ j_1 < ... < j_k}} \sum_{\omega \in \Omega_{1,k}} 1 = \left| (j_1, ..., j_k) \in \{1, ..., n\}^k \ , \ j_1 < ... < j_k \right| \times \left| \Omega_{1,k} \right|$. Or $\left| \Omega_{1,k} \right| = 2^k$;

d'autre part, choisir $(j_1, ..., j_k) \in \{1, ..., n\}^k$ tel que $j_1 < ... < j_k$ revient à choisir k éléments distincts parmi $\{1, ..., n\}$ (il y a ensuite une seule façon de les ranger dans l'ordre croissant) :

$$\left| (j_1, ..., j_k) \in \{1, ..., n\}^k \ , \ j_1 < ... < j_k \right| = \binom{n}{k},$$

et l'on en conclut que $\boxed{\mathbf{P}\left(\left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right) \leq \binom{n}{k} 2^k \left(1 - 2^{-k}\right)^d}$.

23. Une question technique comme on les aime...

D'après (4) : $\mathbf{P}\left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \binom{n}{k} 2^k \left(1 - 2^{-k}\right)^d$. Si l'on choisit $d \geq \frac{n}{2}$ et $k \leq \ln n$, on a donc $\mathbf{P}\left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \binom{n}{k} 2^k \left(1 - 2^{-\ln(n)}\right)^{\frac{n}{2}}$ (les inégalités sont bien dans le bons sens). La majoration $\binom{n}{k} 2^k \leq 2\, n^k \leq 2\, n^{\ln(n)}$ (obtenue en utilisant **Q3.)**, donne déjà :

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq 2\, n^{\ln(n)}\, 2^{\ln(n)} \left(1 - 2^{-\ln(n)}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

On va montrer que $\mathbf{P}\left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (on aura alors $\mathbf{P}\left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \frac{1}{n}$ pour n assez grand). Pour cela, il suffit de prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(n^{\ln(n)}\, 2^{\ln(n)} \left(1 - 2^{-\ln(n)}\right)^{\frac{n}{2}} \right) = 0.$$

On pose donc $a_n = n \left(n^{\ln(n)}\, 2^{\ln(n)} \left(1 - 2^{-\ln(n)}\right)^{\frac{n}{2}} \right)$, et l'on étudie la limite de $\ln(a_n)$: on a

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln(n) + \ln^2(n) + \ln(2)\ln(n) + \frac{n}{2} \ln\left(1 - \underbrace{2^{-\ln(n)}}_{\to 0}\right) \\ &= \ln(n) + \ln^2(n) + \ln(2)\ln(n) - \frac{n}{2} 2^{-\ln(n)} + o\left(n\, 2^{-\ln(n)}\right). \end{aligned}$$

Or $2^{-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-\ln(2)\ln(n)} = n^{-\ln(2)}$. Par conséquent,

$$\ln a_n = \ln(n) + \ln^2(n) + \ln(2)\ln(n) - \frac{n^{1-\ln(2)}}{2} + o\left(n^{1-\ln(2)}\right),$$

et $1 - \ln(2) > 0$, d'où, par croissances comparées, $\ln a_n \sim -\frac{n^{1-\ln(2)}}{2}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln a_n = -\infty$.

On a donc bien $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n \left(n^{\ln(n)}\, 2^{\ln(n)} \left(1 - 2^{-\ln(n)}\right)^{\frac{n}{2}} \right) = 0$, et l'on peut conclure :

$$\boxed{\text{si } d \geq \frac{n}{2} \text{ et } k \leq \ln n \text{, alors, pour } n \text{ assez grand, } \mathbf{P}\left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, ..., L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \frac{1}{n}. \quad (4)}$$

24. Raisonnons par l'absurde : on suppose que v admet au plus k coordonnées non nulles ; il existe donc $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ tels que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$: $v_i = 0$.

Soit $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega_{1,n}$ défini par : $\forall\ j \in \{1, ..., k\}$, $\omega_{i_j} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_{i_j} \geq 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$, et par exemple pour tout $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$, $\omega_i = 1$. Par propriété de k – universalité, il existe $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbf{V}$ tel que pour tout $j \in \{1, ..., k\}$, $u_{i,j} = \omega_{i_j}$. Alors $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{k} u_{i_j} v_{i_j}$, puisque les autres coordonnées de v sont nulles. Dans cette somme, tous les termes sont positifs ; l'un au moins est non nul (car v est non nul, et car toutes les coordonnées de u sont non nulles). Ainsi $\langle u, v \rangle > 0$, ce qui est absurde puisque v est orthogonal à u.

Par conséquent, $\boxed{v \text{ possède au moins } k + 1 \text{ coordonnées non nulles}}$.

25. Si $L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathbf{V})$, alors $L_1^{(n)}$ est orthogonal à tout élément de $\mathbf{V}^{\perp}$, donc en particulier à v ; ceci prouve déjà que $\mathbf{P}\left(L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathbf{V})\right) \leq \mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v \right\rangle = 0\right)$.

Notons $v_{i_1}, ..., v_{i_p}$ les coordonnées non nulles de v (avec $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$, et, d'après Q24., $p \geq k + 1$)

Posons $L = (M_{1,i_1}, ..., M_{1,i_p}) \in \Omega_{1,p}$, et $w = (v_{i_1}, ..., v_{i_p})$. Alors $\left\{\left\langle L_1^{(n)}, v \right\rangle = 0\right\} = \{\langle L, w \rangle = 0\}$, d'où $\mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v \right\rangle = 0\right) = \mathbf{P}(\langle L, w \rangle = 0)$. On pose $J =]-1, 1[$, intervalle ouvert de longueur 2 ; L et w étant à coordonnées entières, $\mathbf{P}(\langle L, w \rangle = 0) = \mathbf{P}(\langle L, w \rangle \in J)$. Or d'après **Q24.** (les hypothèses nécessaires sont bien réunies) : pour p assez grand, $\mathbf{P}(\langle L, w \rangle \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$. On a fait le tour : si k est assez grand, p l'est aussi, et :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathbf{V})\right) \leq \mathbf{P}\left(\left\langle L_1^{(n)}, v \right\rangle = 0\right) = \mathbf{P}(\langle L, w \rangle \in J) \leq p^{-\frac{1}{2}} \leq k^{-\frac{1}{2}}}. \qquad (5)$$

26. • Par hypothèse, $\frac{t_n}{n} \to 0$, donc : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ n \geq n_0$, $\frac{t_n}{n} \leq \varepsilon$.

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ n \geq n_0$, $\frac{t_n}{n} \leq \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $n \geq n_0$:

$\boxed{n - t_n = n\left(1 - \frac{t_n}{n}\right) \geq n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}}$. On suppose désormais n assez grand pour que cette condition soit réalisée.

L'indication proposée n'est pas tout à fait correcte, la notion de k – universalité n'ayant été définie que pour un sous – ensemble de $\Omega_{1,n}$.

On prend, comme conseillé, $k = \lfloor \ln n \rfloor$. Notons, pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, E_j l'événement « $\left\{L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right\}$ est k – universel », et $\overline{E_j}$ son événement contraire. $\left(E_j, \overline{E_j}\right)$ est évidemment un système complet d'événements, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) &= \mathbf{P}_{E_j}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right)\mathbf{P}(E_j) \\ &+ \mathbf{P}_{\overline{E_j}}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right)\mathbf{P}\left(\overline{E_j}\right), \end{aligned}$$

d'où a fortiori : $\mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) \leq \mathbf{P}_{E_j}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) + \mathbf{P}\left(\overline{E_j}\right)$.

Supposons maintenant que $j \in \{n - t_n + 1, ..., n - 1\}$.

- On a $j \geq \frac{n}{2}$, et $k \leq \ln(n)$; on peut donc utiliser le résultat de **Q23.** , qui assure que, pour n suffisamment grand, $\mathbf{P}\left(\overline{E_j}\right) \leq \frac{1}{n}$.
- Remarquons que $\mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right) \neq \mathbb{R}^n$ (car $j < n$) : $\left\{L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right\}^{\perp}$ contient donc un vecteur non nul.

On peut donc utiliser le résultat de **Q25.** : en choisissant n suffisamment grand, k est lui aussi suffisamment grand, et l'on a $\mathbf{P}_{E_j}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Ainsi (pour n assez grand) :

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) &\leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n}\right)\\ &\leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{2(t_n - 1)}{\sqrt{\lfloor \ln n \rfloor}} \leq \frac{2t_n}{\sqrt{\ln(n) - 1}}\end{aligned}}$$

Cela suffirait pour établir le théorème de Komlós, mais n'est pas tout à fait ce qui était demandé. Si l'on tient absolument à la majoration par $\frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}$, il faut affiner, et écrire par exemple que

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) \leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n}\right) = \frac{t_n - 1}{\sqrt{k}} + \frac{t_n - 1}{n}, \text{ d'où}$$

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) \leq t_n\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(n) - 1}} + \frac{1}{n}\right). \text{ Comme}$$

$\frac{1}{\sqrt{\ln(n) - 1}} + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$: pour n assez grand, $\frac{1}{\sqrt{\ln(n) - 1}} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{\ln n}}$, et

$$\boxed{\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) \leq \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} \qquad (6)}. \text{ Ouf.}$$

F Théorème de Komlós

27. D'après (2), $0 \leq \mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right)$. Donc d'après (6), pour toute suite croissante d'entiers $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que $\frac{t_n}{n} \to 0$, on a pour n assez grand :

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) \leq \sum_{j=1}^{n-t_n} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\left(L_1^{(n)}, ..., L_j^{(n)}\right)\right) + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}},$$

d'où, en utilisant l'inégalité (3) :

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) \leq \sum_{j=1}^{n-t_n} 2^{j-n} + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} = 2^{1-t_n} - 2^{1-n} - \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}.$$

On choisit la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que $t_n \to +\infty$ et $\frac{t_n}{\sqrt{\ln n}} \to 0$: par exemple, $t_1 = t_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$, $t_n = \lfloor \ln(\ln(n)) \rfloor$ (c'est bien une suite croissante d'entiers, vérifiant aussi $\frac{t_n}{n} \to 0$).

Alors $\lim_{n \to +\infty} 2^{1-t_n} - 2^{1-n} - \frac{2 t_n}{\sqrt{\ln n}} = 0$. Par encadrement, on en déduit le théorème de Komlós :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\det\left(M^{(n)}\right) = 0\right) = 0}.$$