Mines 2 PC 2010

Théorème de Rolle dans le cas complexe

A Définition de $A_2P(X)$

1)

A_z est linéaire par linéarité de la dérivation. De plus , si $P \in C_n(X)$ et alors $\deg(z-X)P' \leq \deg P$ donc $\deg(A_zP) \leq \deg P \leq n$

De plus $A_z(X^n) = n(z-X)X^{n-1} + nX^n = nzX^{n-1}$.

Donc $\boxed{A_z(\mathrm{C}_n(X)) = vect((A_z(X^i))_{0..n}) \subset \mathrm{C}_{n-1}(X)}$

2)

Soit $P \in \mathrm{C}_n(X)$. On procède comme dans l'énoncé

$A_{z_1}(A_{z_2}P)(X) = A_{z_1}((z_2-X)P'(X) + nP(X)) =$

$(z_1-X)((z_2-X)P''(X) - P'(X) + nP'(X)) + (n-1)((z_2-X)P'(X) + nP(X)) =$

$\boxed{(z_1-X)(z_2-X)P''(X) + (n-1)(z_1+z_2-2X)P'(X) + n(n-1)P(X)}$ et on a le résultat puisque l'expression est symétrique en z_1 et z_2

3)

On a, si $k \in [|1,n|]$ $\underline{A_z((X-z)^k) = (n-k)((X-z)^k)\ \ (1)}$

et $\underline{A_z(1) = n}$. la formule (1) est encore valable.

Les éléments $(X-z)^k$ $(k = 0..n)$ forment une famille de polynômes non nuls échelonnée sur $(1,\ldots,X^n)$, donc une famille libre , donc une base de $\mathrm{C}_n(X)$

Donc $A_z(\mathrm{C}_n(X)) = vect\ (\ (n-k)(X-z)^{n-k})_{k=0..n} = \mathrm{C}_{n-1}(X)$

Donc $\underline{rg(A_z) = n}$ et $\boxed{\ker(A_z) = vect((X-z)^n)}$ (puisque $A_z((X-z)^n) = 0)$

4)

si $k \in [|1,n|]$ $\widehat{A_z}((X-z)^k) = (n-k)((X-z)^k)$

La base $((X-z)^k\ _{k=0,..,n}$) est donc une base de vecteurs propres de $\widehat{A_z}$ et $sp(\widehat{A_z}) = [|0,n|]$

$\underline{\widehat{A_z}\text{ est donc diagonalisable}}$, et les sous espaces

$\boxed{V(n-k) = Vect((X-z)^k)\ (k \in \{0,..,n\})}$ sont les sous-espaces propres (de dimension 1)

5)

Soit E endomorphisme de $\mathrm{C}_n(X)$ qui commute avec $\widehat{A_z}$. Les sous espaces-propres de $\widehat{A_z}$ sont donc stables par u.

Comme ces sous espaces propres sont de dimension 1 , ils sont engendrés par des vecteurs propres de E et E est donc diagonalisable par une même base B que $\widehat{A_z}$

On prend $B = ((X-z)^k\ _{k=0,..,n})$ .Les matrices M et N de E et $\widehat{A_z}$ dans B sont les matrices carrées carrées d'ordre $n+1$ de diagonales respectives $(a_0,\ldots,a_n)$ et $(n,n-1,\ldots,0)$.

Comme les valeurs $n,n-1,\ldots,0$ sont deux à deux distinctes, il existe un unique polynôme P de $\mathrm{C}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [|0,n|]$, on ait $P(i) = a_{n-i}$ (polynômes d'interpolation de Lagrange) .

On a alors $P(M) = N$ donc $P(\widehat{A_z}) = u$ et donc u est un polynôme en $\widehat{A_z}$

B.Définition de δ_ζ

6)

Remarquons que f est une involution (donc une bijection) de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ et $f = f^{-1}$

De plus $O \notin C$ On a donc pour z complexe non nul:

$z \in f(C) \Leftrightarrow f^{-1}(z) \in C \Leftrightarrow f(z) \in C \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z} - z_0\right|^2 = R^2$

Soit: $|z|^2R^2 = |1 - z_0z|^2$

On obtient en développant: $z\overline{z}(|z_0|^2 - R^2) - 2\,\mathrm{Re}(z_0z) + 1 = 0$

Soit: $z\overline{z} - \frac{2}{|z_0|^2 - R^2}\mathrm{Re}(z_0z) = -\frac{1}{z_0|^2 - R^2}$

Ce qui donne: $\left|z - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}\right|^2 = \frac{R^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2}$

$f(C)$ est donc le cercle de centre $\frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}$ et de rayon $\frac{R}{r^2 - R^2}$

7)

Il suffit de remplacer dans le calcul précédent les égalités par des inégalités:

$z \in f(C^-) \Leftrightarrow f^{-1}(z) \in C^- \Leftrightarrow f(z) \in C^- \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z} - z_0\right|^2 < R^2$

Soit: $|z|^2R^2 > |1 - z_0z|^2$

Soit: $z\overline{z} - \frac{2}{|z_0|^2 - R^2}\mathrm{Re}(z_0z) < -\frac{1}{|z_0|^2 - R^2}$

D'où finalement $\boxed{z \in f(C^-) \Leftrightarrow \left|z - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}\right|^2 < \frac{R^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2}}$

On obtient donc la totalité de l'intérieur de $f(C)$ puisque $O \notin f(C)^-$

8)

$f(z_i)$ appartient à $f(C^-)$ donc comme $f(C^-)$ est convexe puisque c'est un disque d'après l'hypothèse $O \in C^+$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i} \in f(C^-)$

Donc $\delta_0 = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}\right)$ est bien défini et $\delta_0 \in f \circ f(C^-) = C^-$.

9)

On prend comme nouvelle origine ξ. L'affixe d'un point $M(z)$ devient alors $Z = z - \xi$

et on est ramené à la question précédente.

C. Condition d'apolarité

10)

$\frac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi - z_i}$ (résultat du cours, que l'on retrouve aisément en calculant $P'(X)$ par dérivation successive de chaque terme)

ce qui s'écrit aussi $\frac{n}{\xi - \delta_\xi} = \frac{P'(\xi)}{P(\xi)}$

Si $P'(\xi)$ est non nul on a:$\delta_\xi - \xi = -n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$ d'où la relation demandée

11)

Rappellons que $A_zP(X) = (z-X)P'(X) + nP(X)$

Si z_i est racine de P on a $A_zP(z_i) = 0$ si et seulement si $(z-z_i)P'(z_i) = 0$, soit $P'(z_i) = 0$.

Si ξ n'est pas racine de P, alors $A_zP(\xi) = 0$ si et seulement si $(z-\xi)P'(\xi) + nP(\xi) = 0$.

$P'(\xi)$ est alors non nul et ξ différent de z : ceci revient donc à $\boxed{\frac{1}{z-\xi} = -n\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}}$ ce qui est précisément la condition $\underline{\delta_\xi = z}$

12)

On écrit la formule de Taylor; $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-z)^k}{k!}P^{(k)}(z)$ et alors , vu que $A_z((X-z)^n) = 0$, on obtient

$$A_zP(X) = \sum_{k=0}^{n-1} A_z((X-z)^k)\frac{P^{(k)}(z)}{k!} = \underline{\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(X-z)^k\frac{P^{(k)}(z)}{k!}}$$

<u>On voit alors que le degré de $A_zP(X)$ est strictement inférieur à $n-1$ si et seulement si $P^{(n-1)}(z) = 0$</u>

Or $P^{(n-1)}(X) = n!X - (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)$.

Donc $P^{(n-1)}(z) = 0$ si et seulement si $\boxed{z = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}$ ce qui donne le résultat demandé.

13)

a)Comme C_1^- est convexe, $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)$ appartient à C_1^- et est donc différent de z.

<u>Donc , d'après la question précédente, $\deg A_zP(X) = n-1$.</u>

b)Il existe un disque inclus strictement dans C_1^- contenant tous les points z_i. En effet si ω est le centre de C_1 et R son rayon, et si C_2 est le cercle de centre ω et de rayon $R' = \frac{1}{2}(R + \max(|z_i - \omega|))$ alors C_2^- est inclus dans C_1^- et donc C_2^- contient tous les points z_i. De plus, on a alors $z \in C_2^+$.

Montrons que tous les zéros de $A_zP(X)$ appartiennent tous à C_2^-. En effet , ses zéros sont soit les racines multiples de P (qui sont de z_i éléments de C_2^-) soit des éléments $\xi \in C\backslash\{z_i, i \in \{1,..,n-1\}$ tels que $\delta_\xi = z$.

Or si $\xi \in C_2^+$, $\delta_\xi \in C_2^-$ et il est donc impossible que $\delta_\xi = z$.

Donc $\xi \in C_2^- \cup C_2$, et donc $\xi \in C_1^-$.

<u>On a donc bien prouvé que tous les zéros de A_zP sont dans C_1^-</u>

Remarque: l'énoncé dit que $n \geq 2$ mais pour $n = 1$, l'hypothèse signifie que $z \neq z_1$ et on a alors $A_z(X-z_1) = (z-X) + X - z_1 = z - z_1$ et $\deg A_z(X-z_1) = 0$

(en particulier $A_z(X-z_1)$ est non nul)

14)

Il est clair que les constantes u et v non nulles ne changent rien au résultat précédent puisque A_z est linéaire.

Supposons que tous les z_i' $(i \in [|1,n|])$ appartiennent à $C \cup C^+$.

Montrons par récurrence descendante sur $p \in [|1,n|]$ que $\deg A_{z_p'}..A_{z_n'}P = p-1$ et que pour $p > 1$

C'est vrai pour $p = 1$ d'après la question 13. Supposons que ce soit vrai à l'ordre $p > 1.$ Alors en utilsant une factorisation de $A_{z_p'}..A_{z_n'}P$ et en appliquant la question 13 à nouveau, $A_{z_{p-1}'}....A_{z_n'}P$ est de degré exactement $p-1$ et si $p-1 > 1,$ toutes les racines de $A_{z_{p-1}'}....A_{z_n'}P = A_{z_{p-1}'}(A_{z_p'}..A_{z_n'}P)$ sont encore dans $C^-,$ ce qui termine la récurrence.

On en déduit donc que $\deg A_{z_1'}...A_{z_n'}P = 0,$ et donc que P n'est pas apolaire par rapport à Q . Par contrapposition, on a le résultat demandé.

15)

Les polynômes du type donné par l'énoncé sont exactement les éléments de $\mathbb{C}_{n-1}(X)$.

L'application h qui à un polynôme T de $C_{n-1}(X)$ associe $\int_0^1 T(a+t(b-a))$ dt est une forme linéaire, et donc, en utilisant l'expression générale d'une forme linéaire dans la base canonique, il existe des complexes $c_0,\ldots,c_{n-1}$ tells que pour tout polynôme T écrit sous la forme précédente:

$$\int_0^1 T(a+t(b-a)) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} a_k c_k$$

On a alors, pour $k \in \{0,..n-1\}$,

$$h(X^k) = \int_0^1 (a+t(b-a))^k dt = \tfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} = c_k\binom{n-1}{k} = c_k\binom{n-1}{n-1-k}$$

On a donc l'égalité demandée avec $\boxed{b_k = (-1)^{n-1-k}c_{n-1-k} = (-1)^{n-1-k}\tfrac{b^{n-k}-a^{n-k}}{(n-k)(b-a)}}$

16)

On prend $a_k = (-1)^k Y^{n-1-k}$ pour $k \in [|0,\ n-1|]$ et $Y \in \mathbb{C}$

On a alors $T(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k X^k Y^{n-1-k} = (Y-X)^{n-1}$

On a alors : $\int_0^1 (Y-a-t(b-a))^{n-1}dt = \boxed{-\tfrac{(Y-b)^n-(Y-a)^n}{n(b-a)}} =$

D'autre part: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}Y^{n-k-1}b_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-1-k}Y^k b_k = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k Y^k}$

(changement d'indice)

D'où le résultat avec $\boxed{C_n = -\tfrac{1}{n(b-a)}}$ puisque Y prend toute valeur complexe, donc on a une égalité de polynômes.

17)

On a $\int_a^b P'(a+t(b-a)) \; = P(b)-P(a) = 0$

On a donc $(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}A_{t_1}A_{t_2}..A_{t_{n-1}}\Delta(X) = 0$

donc $\Delta(X)$ est apolaire par rapport à $P'(X)$

P' possède donc une racine dans un disque ouvert contenant toutes les racines de Δ

Or $\Delta(t) = 0$ si et seulement si il existe $k \in [|0,n-1|]$ tel que $X-b = \exp(\frac{2ik\pi}{n})(X-a)$ (avec $k \in [|0,n-1|]$ soit

$X = \frac{b-a\exp(\frac{2ik\pi}{n})}{1-\exp(\frac{2ik\pi}{n})}$ (avec $k \in [|1,n-1|]$)

Or , pour un tel $X,$ on a $|X-\frac{(a+b)}{2}|= \frac{|b-a|}{2}\left|\frac{1+\exp(\frac{2ik\pi}{n})}{1-\exp(\frac{2ik\pi}{n})}\right| = \frac{|b-a|}{2}\left|\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right|$

Or , pour $k \in [|1,n-1|]$ on a $n-k \in [|1,n-1|]$ et $\left|\frac{\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{(n-k)k\pi}{n}\right)}\right| = \left|\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right|$ et pour $1 \leq k \leq \frac{n}{2},\ \left|\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right| = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$

est maximal pour $k = 1.$ On a en conclusion $\boxed{|X-\frac{(a+b)}{2}|\leq \frac{|b-a|}{2}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}$ pour toute racine X de P

Tout disque ouvert de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $R > R_n(a,b)$ contient donc une racine de P'.

Comme les racines de P' sont en nombre fini,
il existe donc une racine de P' dans le disque fermé de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $R_n(a,b)$.

(Sinon, on aurait un contre-exemple en prenant $R_n(a,b) < R < \min\{|z-\frac{a+b}{2}|/z$ racine de $P'\})$

Complément: Démonstration de l'égalité admise(indications)

Si les t_i sont deux à 2 distincts la famille $(1,(X-t_1)^{n-1},(X-t_2)^{n-1},\ldots,(X-t_{n-1})^{n-1})$ forme une famille libre (en effet , si l'on a une relation de dépendance linéaire entre ces polynômes, on dérive successivement cette relation aux ordres $1,..,n-1,$ et on fait $X = 0.$ On obtient un système homogène dont le déterminant se ramène à un Vandermonde), donc une base de $C_{n-1}(X);$ De plus, $A_{t_1}A_{t_2}..A_{t_{n-1}}((X-t_{n-1})^{n-1}) = 0$ et comme les A_{t_i} "commutent" (et que la composition est associative), on a pour tout $k \in [|1,n-1|]\ :\ A_{t_1}A_{t_2}..A_{t_{n-1}}((X-t_k)^k) = 0.$ Enfin , par un calcul aisé, 1 étant vecteur propre de tous les A_{t_i} on a $A_{t_1}A_{t_2}..A_{t_{n-1}}(1) = (n-1)!$

On a donc, si un polynôme Δ s'écrit

$\alpha_0+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_k(X-t_i)^{n-1}\ :\ \boxed{A_{t_1}A_{t_2}..A_{t_{n-1}}(\Delta) = (n-1)!\alpha_0}$

Il faut donc calculer

$\alpha_0\ :\ \alpha_0+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(X-t_i)^{n-1} = \alpha_0+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}X^k(-1)^{n-1-k}t_i^{n-1-k}\right) =$

$$\alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (-1)^{n-1-k} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t_i^{n-1-k}\right) \quad (1)$$

On a donc comme $\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \binom{n-1}{k} X^k$, on a::

$$\begin{cases} b_0 = \alpha_0 + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t_i^{n-1}\right) \\ \forall k \in [|1, n-1|] \\ \binom{n-1}{k} b_k = (-1)^{n-1-k} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \binom{n-1}{k} t_i^{n-1-k}\right) \end{cases}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} b_k a_{n-1-k} = (-1)^{n-1} a_{n-1} \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{n-1-k} t_i^{n-1-k} \right) =$$

$a_{n-1}\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i P'(t_i) = a_{n-1}\alpha_0$ puisque t_i est racine de P'

Finalement:

$$\boxed{(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} .. A_{t_{n-1}}(\Delta) = (-1)^{n-1} a_{n-1} \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} b_k a_{n-1-k}}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer

Lorsque deux t_i ou plus sont égaux, la formule est encore vraie par continuité et densité.

En effet pour Δ et a_{n-1}fixés , l'application $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \to (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} .. A_{t_{n-1}}(\Delta)$ est continue par les théorèmes usuels, les a_i sont des fonctions continues de t_k (fonctions symétriques) et donc $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \to \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} b_k a_{n-1-k}$ est une fonction continue.

Enfin, l'ensemble des suites $(t_1, .., t_{n-1})$ de complexes 2 à 2 distinctq est partout dense dans C^{n-1}