

Corrigé

Stabilité d'un polynôme trigonométrique

I Stabilité d'un polynôme trigonométrique1. Pour tout c de E on note :

$$\|c\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \in \mathbb{R}^+$$

$$\bullet \|c\| = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\bullet \forall c \in E \exists K \in \mathbb{N}, \exists (c_{-K}, \dots, c_K) \in \mathbb{C}^{2K+1} \text{ tels que } c(x) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{ikx}$$

$$\forall c \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ on a une écriture du type } \lambda c(x) = \sum_{k=-K}^K \lambda c_k e^{ikx}$$

$$\forall c \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$

$$\|\lambda c\| = \sum_{k=-K}^K |\lambda c_k| = |\lambda| \sum_{k=-K}^K |c_k| = |\lambda| \|c\|$$

$$\bullet \forall (c_1, c_2) \in E^2, \text{ en prenant } K \in \mathbb{N}, K \geq \max(\deg c_1, \deg c_2) \text{ on peut}$$

$$\text{écrire : } c_1(x) = \sum_{n=-K}^K c_{1,n} e^{inx}, c_2(x) = \sum_{n=-K}^K c_{2,n} e^{inx}$$

$$\|c_1 + c_2\| = \sum_{n=-K}^K |c_{1,n} + c_{2,n}| \leq \sum_{n=-K}^K |c_{1,n}| + \sum_{n=-K}^K |c_{2,n}| = \|c_1\| + \|c_2\|$$

$$2. \text{ Soit } c \in E \text{ et } K = \deg c. \text{ Pour } p \in \mathbb{Z}, \int_{-\pi}^{\pi} c(t) e^{-ipt} dt = \sum_{k=-K}^K \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-p)t} dt$$

$$\text{Mais } \forall r \in \mathbb{Z}^*, \int_{-\pi}^{\pi} e^{irt} dt = \left[\frac{e^{irt}}{ir} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^r - (-1)^r}{ir} = 0.$$

Donc si $p \in \{-\deg(c), \dots, \deg(c)\}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_p e^{0t} dt = c_p.$$

3. Pour tout c de E , il existe $K \in \mathbb{N}$ et des complexes c_{-K}, \dots, c_K tels que

$$c(x) = \sum_{n=-K}^K c_n e^{inx}, \text{ pour tout } x \text{ réel. Donc : } \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|c(x)| \leq \sum_{n=-K}^K |c_n e^{inx}| = \sum_{n=-K}^K |c_n| = \|c\|$$

 c est bornée sur \mathbb{R} et $\|c\|_{\infty} = \sup_{\mathbb{R}} |c| \leq \|c\|$

En prenant c non nul et $K = \deg c$ et en utilisant la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{Z} \text{ avec } |p| \leq K, |c_p| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |c(x)| |e^{-ipx}| dx$$

$$|c_p| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| \right) \times 1 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|c\|_{\infty} dx = \|c\|_{\infty}$$

$$\text{Finalement : } \|c\| = \sum_{p=-K}^K |c_p| \leq (2K+1) \|c\|_{\infty} \text{ et}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| \leq \|c\| \leq (2 \deg c + 1) \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)|$$

Définition 2 On dira que le polynôme trigonométrique c est stable lorsque la suite $\|c^k\|$ des normes de ses puissances successives est bornée quand k décrit \mathbb{N} .

4. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|c(x_0)| = M_0 > 1$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, M_0^k = |c(x_0)|^k \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |c^k(x)| \leq \|c^k\|.$$

Comme $M_0 > 1$, par minoration, $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_0^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|c^k\| = +\infty$. c n'est pas stable.

II Un polynôme trigonométrique particulier

$$\alpha \in]0, 1[, a(x) = \alpha^2 \cos x - i\alpha \sin x + 1 - \alpha^2$$

$$\text{Pour tout entier } k \geq 2, a^k(x) = \sum_{n=-k}^k a_{k,n} e^{inx}$$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |a(x)|^2 &= (\alpha^2(\cos x - 1) + 1)^2 + \alpha^2 \sin^2 x \\ &= (\alpha^2(-2 \sin^2 \frac{x}{2}) + 1)^2 + \alpha^2 \sin^2 x \\ &= 4\alpha^4 \sin^4 \frac{x}{2} - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 + \alpha^2 \sin^2 x \\ &= 4\alpha^4 \sin^4 \frac{x}{2} - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 + 4\alpha^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 4\alpha^4 \sin^4 \frac{x}{2} + 1 + 4\alpha^2 \sin^2 \frac{x}{2} (\cos^2 \frac{x}{2} - 1) \\ &= 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4) \sin^4 \frac{x}{2} \end{aligned}$$

On a $a(0) = 1$ et comme $\alpha^2(1 - \alpha^2) > 0$, $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in]0, \pi]$.

6. Comme $\sin x =_0 x + o(x)$, $|a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4) \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)$.

Mais $\ln(1 + X) =_0 X + o(X)$ donc :

$$g(x) = \ln(|a(x)|^2) = -\frac{\alpha^2 - \alpha^4}{4} x^4 + o(x^4).$$

$$\text{De même : } \frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = \frac{-\alpha \sin x}{1 - \alpha^2(1 - \cos x)} = \frac{-\alpha \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = \frac{-\alpha \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)}{1 - 2\alpha^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^4) \right)^2} = \frac{-\alpha \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)}{1 - \alpha^2 \frac{x^2}{2} + \alpha^2 \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = \frac{-\alpha x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)}{1 - \alpha^2 \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = -\alpha x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right) \left(1 + \alpha^2 \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)$$

$$\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = -\alpha x \left(1 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6} \right) x^2 + o(x^3) \right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2} \right) x^3 + o(x^4)$$

Comme, au voisinage de 0, $\arctan(X) = X - \frac{X^3}{3} + o(X^4)$, par composition :

$$\arctan \left(\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} \right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2} \right) x^3 + \frac{\alpha^3 x^3}{3} + o(x^4)$$

$$h(x) = \arctan \left(\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} \right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha - \alpha^3}{6} \right) x^3 + \frac{\alpha^3 x^3}{3} + o(x^4)$$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 1$. Dans un voisinage de 0, $\mathcal{R}(a(x)) > 0$ et, si dans ce voisinage on

note $\theta(x)$ l'élément de $] -\pi/2, \pi/2[$ tel que $a(x) = |a(x)|e^{i\theta(x)}$, on a :

$$\tan(\theta(x)) = \frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} \text{ et donc } \theta(x) = \arctan \left(\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} \right)$$

Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$a(x) = |a(x)|e^{i\theta(x)} = e^{\frac{g(x)}{2}} e^{ih(x)} \quad \text{puis en remplaçant}$$

$$a(x) = \exp \left(-i\alpha x + i \frac{\alpha - \alpha^3}{6} x^3 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{8} x^4 + o(x^4) \right).$$

Il existe donc trois réels α, β et γ strictement positifs et une fonction $\varepsilon : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, tendant vers 0 quand x tend vers 0 tels que l'on ait, pour tout x dans un voisinage de 0,

$$a(x) = \exp \left(-i\alpha x + i\beta x^3 - \gamma x^4 (1 + \varepsilon(x)) \right)$$

On admet que la fonction ε est définie et de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$. Dans la suite, on posera

$$d(x) = \exp \left(-i\alpha x + i\beta x^3 \right) \text{ et } b(x) = \exp \left(-\gamma x^4 (1 + \varepsilon(x)) \right),$$

de sorte que $a(x) = d(x)b(x)$ et $|a(x)| = |b(x)|$.

III Majoration des coefficients de a^k

Soit $[r, s] \subset \mathbb{R}$ avec $r < s$. f est C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifie :

$\forall t \in [r, s], |f'(t)| \geq K < 0$ et $f''(t) \geq 0$.

$$8. \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt = \left[\frac{-1}{f'(t)} \right]_r^s = \frac{1}{f'(r)} - \frac{1}{f'(s)}$$

Par suite :

$$\left| \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt \right| \leq \frac{1}{|f'(r)|} + \frac{1}{|f'(s)|} \leq \frac{2}{K}.$$

9.

$$\int_r^s \frac{1}{f'(t)} (f'(t) \cos f(t)) dt = \left[\frac{1}{f'(t)} \sin f(t) \right]_r^s - \int_r^s \left(\frac{-f''(t)}{(f'(t))^2} \right) \sin f(t) dt$$

$$\int_r^s \cos f(t) dt = \frac{\sin f(s)}{f'(s)} - \frac{\sin f(r)}{f'(r)} + \int_r^s \left(\frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \right) \sin f(t) dt$$

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|f'(s)|} + \frac{1}{|f'(r)|} + \left| \int_r^s \left(\frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \right) \sin f(t) dt \right|.$$

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{2}{K} + \int_r^s \left| \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \sin f(t) \right| dt$$

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{2}{K} + \int_r^s \frac{|f''(t)|}{(f'(t))^2} \times 1 dt \leq \frac{2}{K} + \frac{2}{K} = \frac{4}{K}$$

en utilisant la question 8. et le fait que $f'' \geq 0$.

Dans les questions 10 à 12, $[u, v]$ désigne un segment de longueur non nulle de \mathbb{R} , et f une fonction de classe C^2 sur $[u, v]$ à valeurs réelles. On suppose cette fois que $f''(t) \geq M > 0$ pour tout t appartenant à $[u, v]$.

10. On suppose que $f'(u) \geq 0$. Soit $t \in [u + 2/\sqrt{M}, v]$: $f'(t) - f'(u) = \int_u^t f''(x) dx$.

$$\text{Comme } f'(u) \geq 0, f'(t) \geq \int_u^t f''(x) dx = \int_u^{u+2/\sqrt{M}} f''(x) dx + \int_{u+2/\sqrt{M}}^t f''(x) dx.$$

$$\text{Comme } f''(x) \geq M \geq 0, f'(t) \geq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} M dx = M \frac{2}{\sqrt{M}} = 2\sqrt{M}.$$

11. Sur l'intervalle $[u + 2\sqrt{M}, v]$ on peut appliquer le résultat de la question 9.

$$\text{avec } K = \sqrt{2M}. \text{ D'où } \left| \int_{u+2/\sqrt{M}}^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{2\sqrt{M}} = \frac{2}{\sqrt{M}}$$

$$\text{De plus } \left| \int_u^{u+2/\sqrt{M}} \cos f(t) dt \right| \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} |\cos f(t)| dt \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} 1 dt = \frac{2}{\sqrt{M}}$$

$$\text{Par suite : } \left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

Remarque : si $u + 2\sqrt{M} \geq v$, il n'est pas nécessaire de couper l'intervalle en deux et le majorant est $\frac{2}{\sqrt{M}} \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$.

On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leq 0$.

12. On suppose que $f'(u)f'(v) < 0$. Comme $f'' > 0$ sur $[u, v]$, f' est strictement croissante, continue (f est C^2), sur $[u, v]$. Elle réalise une bijection de $[u, v]$ dans $J = f'([u, v])$. Comme $f'(u) < 0$ et $f'(v) > 0$, l'intervalle image contient 0. Du fait de la bijection, il existe un unique réel w de $]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$.

On peut alors appliquer le résultat de la question 11. sur chacun des segments $[u, w]$ et $[w, v]$ et :

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| = \left| \int_u^w \cos f(t) dt + \int_w^v \cos f(t) dt \right| \leq \left| \int_u^w \cos f(t) dt \right| + \left| \int_w^v \cos f(t) dt \right|.$$

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}} + \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

Ce dernier majorant est donc valable dans tous les cas de figure.

Dans les questions 13 et 14, ζ désigne un nombre réel, k un entier naturel et $J_{k,\zeta}$ la fonction définie par

$$J_{k,\zeta}(x) = \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt,$$

où β est le nombre réel non nul défini après la question 7.

13. Soit $x \in [k^{-1/3}, \pi]$. Prenons $f(x) = \zeta x + k\beta x^3$, f est c^2 et $f''(x) = 6k\beta x$. Sur $[k^{-1/3}, \pi]$, $f''(x) \geq 6k\beta k^{-1/3} > 0$. On peut appliquer le résultat de la question 12.

$$\left| \int_{k^{-1/3}}^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq \frac{8}{\sqrt{6\beta k^{2/3}}} = \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}.$$

14. Si $x \in [0, k^{-1/3}]$:

$$\left| \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq \int_0^x |\cos(\zeta t + k\beta t^3)| dt \leq \int_0^x dt \leq x \leq k^{-1/3}$$

Si $x \in [k^{-1/3}, \pi]$:

$$\left| \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq \left| \int_0^{k^{-1/3}} \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| + \left| \int_{k^{-1/3}}^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right|$$

$$\left| \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq k^{-1/3} + \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$$

En prenant $C_1 = 1 + \frac{8}{\sqrt{6\beta}} > 0$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$|J_{k,\zeta}(x)| \leq C_1 k^{-1/3}$$

On admet que l'on peut démontrer de la même manière qu'il existe une constante C_2 , indépendante de k et ζ , telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation suivante :

$$\left| \int_0^x \sin(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq C_2 k^{-1/3} \quad (1)$$

15. On sait que $b(x) = \exp(-\gamma x^4(1 + \varepsilon(x)))$, ε fonction c^1 de limite 0 en 0. $\gamma > 0$ donc $|b(x)| = \exp(-\gamma x^4) |\exp(-\gamma \varepsilon(x)x^4)|$.

Pour tout z de \mathbb{C} , $|e^z| \leq e^{|z|}$ donc $|b(x)| \leq e^{-\gamma x^4} e^{\gamma x^4 |\varepsilon(x)|}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |\varepsilon(x)| = 0$ il existe $r > 0$ tel que, si $x \in [0, r]$, $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Pour $x \in [0, r]$, $|b(x)| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}x^4}$.

Sur $[r, \pi]$, $|b(x)| = |a(x)| < 1$. Par continuité, l'image du segment $[r, \pi]$ par $|b|$ est un segment $[m_1, m_2]$ avec $0 \leq m_2 < 1$.

Soit $c_1 = \frac{-\ln m_2}{\pi^4} > 0$. Pour tout x de $[r, \pi]$:

$$|b(x)| \leq m_2 = e^{-c_1 \pi^4} \leq e^{-c_1 x^4}$$

Soit $\lambda = \min\left(\frac{\gamma}{2}, c_1\right) < 0$. En utilisant les deux inégalités précédentes et la parité de la fonction $|a| = |b|$ on a, pour tout x de $[-\pi, \pi]$:

$$|b(x)| \leq \exp(-\lambda x^4).$$

16. $b(x) = \exp(-\gamma x^4(1 + \varepsilon(x)))$; $b'(x) = b(x)(-4\gamma x^3(1 + \varepsilon(x)) - \gamma x^4 \varepsilon'(x))$.
 $|b'(x)| \leq 1 \times |x^3| (4\gamma(1 + |\varepsilon(x)|) + \gamma|x||\varepsilon'(x)|)$.
 Par hypothèse la fonction $x \mapsto (4\gamma(1 + |\varepsilon(x)|) + \gamma|x||\varepsilon'(x)|)$ est continue, donc bornée sur $[-\pi, \pi]$. Il existe une constante $C_3 > 0$ telle $\forall x \in [-\pi, \pi]$:

$$|b'(x)| \leq C_3 |x^3|.$$

17. $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k, \alpha k+n}(x)(b(x))^k dx = [J'_{k, \alpha k+n}(x)(b(x))^k]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} k J_{k, \alpha k+n}(x)(b(x))^{k-1} b'(x) dx$$

En utilisant les majorations obtenues dans les questions précédentes :

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} J'_{k, \alpha k+n}(x)(b(x))^k dx \right| \leq 2C_1 k^{-1/3} \times 1 + k C_1 k^{-1/3} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-\lambda x^4}\right)^{k-1} C_3 |x^3| dx$$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} J'_{k, \alpha k+n}(x)(b(x))^k dx \right| \leq 2C_1 k^{-1/3} + 2C_1 C_3 k^{2/3} \int_0^{\pi} e^{-\lambda(k-1)x^4} x^3 dx$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda(k-1)x^4} x^3 dx = -\frac{e^{-\lambda(k-1)\pi^4} - 1}{4\lambda(k-1)} \leq \frac{1}{4\lambda(k-1)} \leq \frac{1}{2\lambda k} \text{ si } k \geq 2$$

D'où une constante $C_4 > 0$ telle que pour tout entier non nul k et pour tout entier relatif n , on ait l'inégalité :

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} J'_{k, \alpha k+n}(x)(b(x))^k dx \right| \leq C_4 k^{-1/3}.$$

Comme $J'_{k,\zeta}(x) = \cos(\zeta x + k\beta x^3)$ on a montré que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos((\alpha k + n)x + k\beta x^3)(x)(b(x))^k dx \right| \leq C_4 k^{-1/3}.$$

Même résultat avec $-\alpha - kn$ car ζ n'intervient pas.

On démontrerait un résultat identique avec $\left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin((-\alpha k - n)x + k\beta x^3)(x)(b(x))^k dx \right|$

$$18. a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a(x))^k e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(x)^k b(x)^k e^{-inx} dx$$

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-k\alpha x + k\beta x^3 - nx)} b(x)^k dx.$$

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(-k\alpha x + k\beta x^3 - nx) b(x)^k dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-k\alpha x + k\beta x^3 - nx) b(x)^k dx$$

On retrouve les expressions précédentes et :

$$|a_{k,n}| \leq C_5 k^{-1/3}$$

avec $C_5 > 0$ indépendante de k et n .

On admet désormais l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que, pour tout entier k non nul,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^{2k} dx \geq C_6 k^{-1/4}.$$

19. La relation de Parseval appliquée à a^k donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^2 dx = \sum_{n=-k}^k |a_{k,n}|^2 \geq C_6 k^{-1/4}$$

Si $a_{k,n} \neq 0$ alors $|a_{k,n}| = \frac{|a_{k,n}|^2}{|a_{k,n}|} \geq \frac{|a_{k,n}|^2}{C_5 k^{-1/3}}$

La minoration reste vraie si $a_{k,n} = 0$ donc :

$$\|a^k\| = \sum_{n=-k}^k |a_{k,n}| \geq \sum_{k=-n}^n \frac{|a_{k,n}|^2}{C_5 k^{-1/3}} \geq \frac{C_6 k^{-1/4}}{C_5 k^{-1/3}} = C_7 k^{1/12}$$

Avec $C_7 = C_6/C_5 > 0$. On a bien, pour tout entier k :

$$\|a^k\| \geq C_7 k^{1/12}.$$

La fonction a n'est pas stable !

Fin du corrigé