Mines-Ponts, 2002
Mathématiques I, PC

Première partie.

I.1. Pour x non nul, $\lim_{n\mapsto+\infty}\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\mapsto+\infty}\dfrac{x^2}{(n+1)^2}=0$ donc la série converge par la règle de d'Alembert; F est définie sur $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence est infini, on peut donc dériver terme à terme. $F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2n\dfrac{x^{2n-1}}{(n!)^2}\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. $F''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-1)\dfrac{x^{2n-2}}{(n!)^2}>0$ donc F est convexe.

I.2. a. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{2n+2}{2n+1}>1$. Donc la suite (v_n) est croissante et $v_n\geqslant v_0=1$, d'où $\dfrac{1}{(n!)^2}\leqslant\dfrac{4^n}{(2n)!}$. On en déduit pour $x\geqslant 0$: $F(x)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^nx^{2n}}{(2n)!}=ch(2x)$.

b. $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}=\dfrac{2n+2}{2n+3}<1$. Donc la suite (w_n) est décroissante et $w_n\leqslant w_0=1$, d'où $\dfrac{1}{(n!)^2}\geqslant\dfrac{4^n}{(2n+1)!}$. On en déduit pour $x>0$: $F(x)\geqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^nx^{2n}}{(2n+1)!}=\dfrac{sh(2x)}{2x}$.

c. $G(x)=\sqrt{ch(2x)\dfrac{sh(2x)}{2x}}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{-4x}}{8x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{2x}}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-8x}}$ d'où $G(x)\sim\dfrac{\Phi(x)}{2\sqrt2}$ au voisinage de $+\infty$.

Deuxième partie.

II.1. a. $I_0=\lim_{A\mapsto+\infty}=\int_0^A\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\lim_{A\mapsto+\infty}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^A=\dfrac{1}{x}$ car $x>0$. Supposons que I_{k-1} existe et intégrons par parties: $I_k(A)=\int_0^A t^k\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\left[t^k\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^A+\dfrac{k}{x}I_{k-1}(A)$. On en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que I_k existe et est égale à $\dfrac{k}{x}I_{k-1}$. Une récurrence simple donne $I_k=\dfrac{k!}{x^{k+1}}$.

b. La fonction est continue puisque F est continue sur $\mathbb{R}$; $0\leqslant F(t)e^{-xt}\leqslant ch(2t)e^{-xt}\sim\dfrac{e^{(2-x)t}}{2}$ au voisinage de $+\infty$. Pour $x>2$ cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Le théorème de convergence monotone peut alors s'appliquer à la suite de fonctions $S_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\dfrac{t^{2n}}{(n!)^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et on obtient:

$$L(F)(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} I_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}.$$

c. Posons $g_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n} = \dfrac{4^n t^{2n}}{v_n}$; $\dfrac{g_{n+1}}{g_n} = 4t^2 \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ a pour limite $4t^2$ d'après le résultat du I.2.a . La règle de D'Alembert entraine que la série $(\sum g_n)$ converge pour $4t^2 < 1$ et diverge pour $4t^2 > 1$; son rayon de convergence R est donc égal à $1/2$. Pour $|u| < 1$ on sait que $(1+u)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)...(-1/2-n+1)}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2^n n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} u^n$. En posant $u = -4t^2$ pour $|t| < 1/4$ on a bien $|u| < 1$ et on obtient $g(t) = (1-4t^2)^{-1/2}$.

d. $L(F)(x) = \dfrac{1}{x} g(1/x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ pour $x > 2$.

e. Soit $h : t \mapsto \Phi(t)\mathrm{e}^{-xt}$; au voisinage de 0, on a $h(t) \sim \dfrac{1}{t^{1/2}}$ qui est intégrable sur]0,1]; d'autre part, si $x > 2$ et $t \geqslant 1$, $h(t) \leqslant e^{(2-x)t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$;h est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour $x \leq 2$: $h(t) \geqslant \dfrac{1}{t^{1/2}}$ qui n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Φ est donc définie sur $]2, +\infty[$. Par suite, $L(\Phi)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(2-x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Effectuons le changement de variable défini par $u = \sqrt{(x-2)t}$: $L(\Phi)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}\sqrt{x-2}}{u} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{x-2} = \sqrt{\frac{\pi}{x-2}}$.

II.2 a. Si $x_0 \in I(f)$, pour $x > x_0$ et $t > 0$ on a $|f(t)e^{-xt}| \leqslant |f(t)e^{-x_0 t}|$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc $x \in I(f)$.

b. $I(f)$ est supposé non vide et non égal à $\mathbb{R}$; il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \notin I(f)$; x_0 est alors un minorant de $I(f)$ car $x < x_0$ et $x \in I(f)$ entrainerait $x_0 \in I(f)$. $I(f)$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure $\alpha(f)$. Si $\alpha(f) \in I(f)$, $I(f) = [\alpha(f), +\infty[$ d'après le a. Sinon $I(f) =]\alpha(f), +\infty[$ car tout $x > \alpha(f)$ est dans $I(f)$ par définition de la borne inférieure et le a.

c. La fonction $(x,t) \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $]\alpha(f), +\infty[\times]0, +\infty[$; de plus pour $x \in [a,b] \subset]\alpha(f), +\infty[$ on a $|f(t)e^{-xt}| \leqslant |f(t)e^{-at}|$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $L(f)$ est continue sur $]\alpha(f), +\infty[$. Pour f positive et pour $x < y$ on a $f(t)e^{-yt} \leqslant f(t)e^{-xt}$ d'où $L(f)(y) \leqslant L(f)(x)$. Si $\alpha(f) \in I(f)$ on a donc pour $x \in [\alpha(f), +\infty[$: $0 \leqslant L(f)(x) \leqslant L(f)(\alpha(f))$ donc $L(f)$ est bornée.

d. i) Par hypothèse $L(g)(x) \leqslant M$ pour $x \in]\alpha(g), +\infty[$; on en déduit avec g positive:

$\displaystyle\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant M.$

ii) La fonction $(x,t) \mapsto g(t)e^{-xt}$ est continue sur $[\alpha(g),+\infty[\times]0,A[$; la fonction $t \mapsto g(t)e^{-\alpha(g)t}$ est intégrable sur $]0,A[$ car elle est continue et équivalente à $g(t)$ au voisinage de 0; de $0 \leqslant g(t)e^{-xt} \leqslant g(t)e^{-\alpha(g)t}$ on déduit alors que la fonction $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ est continue sur $[\alpha(g),+\infty[$ d'où par passage à la limite: $\displaystyle\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{-\alpha(g)t}\,\mathrm{d}t \leqslant M$. Cette majoration étant valable pour tout A on en déduit que $L(g)$ est définie sur $[\alpha(g),+\infty[$.

II.3 a. Puisque $g(t) \sim h(t)$ au voisinage de $+\infty$, on a pour $t \geqslant t_0$: $g(t) \leqslant 2h(t)$. On en déduit $I(h) \subset I(g)$ (les 2 fonctions sont intégrables sur $]0,t_0]$). En échangeant g et h on a $I(g) = I(h)$ d'où $\alpha(g) = \alpha(h)$.

b. Si $\alpha(h) \notin I(h)$, $L(h)$ n'est pas bornée sur $]\alpha(h),+\infty[$; puisque $L(h)$ est décroissante on déduit: $\displaystyle\lim_{x\mapsto\alpha(h)^+} L(h)(x) = +\infty$. Puisque g et h sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ on déduit $|g(t)-h(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}h(t)$ pour $t \geqslant A$ $(h \geqslant 0)$. Par suite: $|L(g)(x) - L(h)(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)-h(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A |g(t)-h(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_A^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. D'une part $\displaystyle\int_0^A |g(t)-h(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A |g(t)-h(t)|\mathrm{e}^{-\alpha(h)t}\,\mathrm{d}t = C$. D'autre part $L(h)(x) > 0$ pour x assez proche de $\alpha(h)$. En divisant par $L(h)(x)$ on obtient: $\left|\dfrac{L(g)(x)}{L(h)(x)} - 1\right| \leqslant \dfrac{C}{L(h)(x)} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$ pour $x \leqslant x_0$ (puisque $\displaystyle\lim_{x\mapsto\alpha(h)^+} L(h)(x) = +\infty$). On a bien montré $L(g) \sim L(h)$ au voisinage de $\alpha(h)$.

II.4 De $L(F)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ au voisinage de 2 et $L(\Phi)(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{x-2}}$ on déduit $L(f) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\Phi$; on peut conjecturer que cet équivalent est aussi valable au voisinage de $+\infty$.

Troisième partie.

III.1 a. La série de fonctions de terme général $k_n(t) = \dfrac{x^n}{n!}e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $|k_n(t)| = \dfrac{x^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (de somme e^x). k_n étant continue, la fonction k est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. k_n étant 2π-périodique, la fonction k l'est aussi. Appliquons l'égalité de Parseval: $\displaystyle\int_0^{2\pi} |k(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(k)|^2$. Calculons les coefficients de Fourier de k en utilisant la convergence normale de la série:

$c_p(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t$. Avec $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq p \\ 2\pi & \text{si } n = p\end{cases}$ on obtient $c_p(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p<0 \\ \dfrac{x^p}{p!} & \text{si } p\geqslant 0\end{cases}$. Par suite $J = 2\pi\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(p!)^2} = 2\pi F(x)$.

b. $k(t) = e^{xe^{it}}$ d'où $|k(t)|^2 = e^{2x\cos t}$.

c. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t$ par période 2π et parité, donc $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t$.

III.2 a. h_1 et h_3 ne posent pas de problème de définition; au voisinage de 1^-, $\dfrac{e^{xt}}{\sqrt{1-t}} \sim \dfrac{e^x}{(1-t)^{1/2}}$ qui est intégrable sur $[0,1[$ donc h_2 est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b. $h_2(x) = \displaystyle\int_0^1 2e^{x(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \frac{2e^x}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v$ en posant $v = u\sqrt{x}$. Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on obtient $h_2(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}e^x$ au voisinage de $+\infty$.

c. Le même changement de variable donne $h_3(x) = \displaystyle\int_0^1 2u^2e^{x(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \frac{e^x}{x}\int_0^x \sqrt{\frac{v}{x}}e^{-v}\,\mathrm{d}v$ en posant $v = xu^2$. Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{v}e^{-v}\,\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on obtient $h_3(x) \sim \dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}e^x$ au voisinage de $+\infty$.

d. $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2(1-u)}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+u}}{\sqrt{2(1-u^2)}} = \dfrac{\sqrt{1-u}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+u})\sqrt{2(1+u)}} \leqslant \dfrac{\sqrt{1-u}}{2+\sqrt{2}}$ d'où $C = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$.

e. Posons $u = \cos t$ dans $h_1(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{x\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{xu}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. On déduit du d : $\left|h_1(x) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_2(x)\right| \leqslant Ch_3(x)$. Puisque $h_3(x) \sim \dfrac{1}{2x}h_2(x) = o(h_2(x))$ au voisinage de $+\infty$ on obtient $h_1(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_2(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}e^x$ au voisinage de $+\infty$.

III.3 $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}h_1(2x) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t$. Dans cette dernière intégrale, $x\cos t \leqslant 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$; or $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} h_1(2x) = +\infty$ donc $F(x) \sim \dfrac{1}{\pi}h_1(2x) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi x}}e^{2x}$ au voisinage de $+\infty$.