Correction de l'épreuve

Exercice 1.
Trigonalisation d'une matrice dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'objet de l'exercice est de diagonaliser ou trigonaliser M_a suivant les valeurs du paramètre a.

1. On commence par chercher les valeurs du réel a pour lesquelles la matrice M_a est diagonalisable. Pour se faire on calcule le polynôme caractéristique de M_a :

$$\begin{aligned} \chi_{M_a}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2(X+1) \end{aligned}$$

χ_{M_a} est scindé et admet deux racines : 1, d'ordre 2 et -1, simple.

D'après le cours, on sait alors que M_a est diagonalisable si et seulement si E_1 est de dimension 2. Soit $X = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} ax & = 0 \\ y & = z \end{cases}$$

• Si $a = 0$, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, E_1 est de dimension 2.

• Si $a \neq 0$, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Donc E_1 est de dimension 1.

$$\boxed{\text{En conclusion : } M_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a = 0}$$

2. On utilise le résultat précédent : $\forall\, a \in \mathbb{R}$, 0 n'appartient pas au spectre de M_a, donc

$$\boxed{M_a \text{ est inversible pour tous les réels } a.}$$

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit donc $a \in \mathbb{R}$, a non nul.
Notons φ_a l'endomorphisme canoniquement associé à M_a et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cherche une base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que $\mathcal{M}at_{\mathscr{B}'}(\varphi_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc telle que :

$$\varphi_a(u_1) = -u_1,\ \varphi_a(u_2) = u_2 \text{ et } \varphi_a(u_3) = u_2 + u_3.$$

-> On résout $M_aX = -X$ pour obtenir $u_1 = \left(\frac{a}{2}, -1, 1\right)$.

-> Il suffit de choisir pour u_2 un vecteur propre associé à la valeur propre 1, par exemple : $u_2 = (1, 0, 0)$.

-> Enfin :

$$\begin{aligned}
\varphi(u_3) = u_2 + u_3 &\Longleftrightarrow M_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x+ & ay & & = \; 1+x \\ & & z & = \; y \\ & y & & = \; z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ay & = 1 \\ y & = z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow y = z = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

On prend par exemple $u_3 = \left(0, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

-> Il faut à présent vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, or

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3) = \frac{2}{a} \neq 0$$

Les matrices de φ_a dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont semblables, donc

$$\boxed{M_a \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}}$$

Exercice 2.

Etude d'une suite de fonctions. Théorème de convergence dominée.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}$.

On s'intéresse aux propriétés de cette intégrale à paramètre sans étudier sa dérivée.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x \geqslant 0$.
Comme la fonction f est définie comme intégrale à paramètre, connaître l'ensemble de définition de f revient à connaître l'ensemble des valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale converge.

• La fonction à intégrer φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ car son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

• Pour tout $t \geqslant 0$, $|\varphi_x(t)| = \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$.
Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et par comparaison, φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,.
En conclusion $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour tout $x \geqslant 0$, et $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $x \leqslant y$.
Suivons l'énoncé qui nous incite à comparer $f(x)$ et $f(y)$:

Pour tout $t \geqslant 0$, $0 < 1 + tx \leqslant 1 + ty$, donc $\dfrac{1}{1+tx} \geqslant \dfrac{1}{1+ty}$, et par suite :

$$\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt} \geqslant \frac{e^{-t}}{1+yt} = \varphi_y(t).$$

Enfin, par positivité de l'intégrale généralisée :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{+\infty} \varphi_y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$

3. <u>Limite de f en l'infini</u>

3.1. On utilise le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$:

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nt = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = 0$.
La suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$, $1 + nt \geqslant 1$, donc

$$|\varphi_n(t)| = \frac{e^{-t}}{1+nt} \leqslant e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par convergence dominée, comme la fonction nulle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

3.2. D'après la question précédente, $\ell = 0$.

3.3. f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc d'après le théorème de la limite monotone, admet une limite en $+\infty$ (éventuellement $-\infty$).

On a démontré que la suite $(f(n))$ converge vers $\ell = 0$. Par unicité de la limite, il vient donc que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$

De façon plus précise, soit ε un réel strictement positif.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, il existe un entier N tel que : $n \geqslant N \Longrightarrow |f(n)| < \varepsilon$.
Alors, pour tout $x \geqslant N$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant f(N) < \varepsilon$ puisque f est décroissante.

Concluons :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que : $x \geqslant N \Longrightarrow |f(x| < \varepsilon$: $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$

Exercice 3.
Série entière à partir d'une suite récurrente

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on démontre en utilisant une récurrence dite « forte » la propriété : $0 < a_n \leqslant 1$.

— Initialisation : $0 < a_0 \leqslant 1$ car $a_0 = 1$

— Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!],\ 0 < a_k \leqslant 1$.

Alors :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0,n]\!],\ -n \leqslant -k \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \leqslant n-k+2 \leqslant n+2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{n-k+2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{a_k}{2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{car } 0 < a_k \leqslant 1\end{aligned}$$

En ajoutant ces inégalités pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}0 &< \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &< a_{n+1} \leqslant 1\end{aligned}$$

— Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0,1]}$

2. D'après le résultat obtenu à la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est donc supérieur ou égal à celui de la série entière géométrique $\sum x^n$ dont le rayon de convergence vaut 1 (c'est du cours).

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. : on est certain que f existe au moins dans cet intervalle.

33.1. Posons $c_n = \dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n}$.

Donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n\, x^n$ a le même rayon de convergence que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n}x^n$ et donc que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ qui est 1.

3.2. D'après la question précédente, on sait déjà que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$ est définie sur $]-1,1[$.

De façon plus précise :

— pour $|x| < 1$, $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ converge,

— pour $|x| > 1$, $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ diverge.

Il reste à étudier ce qui se passe aux bords de l'intervalle :

— Pour $x = 1$, $\sum \dfrac{1}{n+2}$ diverge car $\dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ et la série harmonique diverge.

— Pour $x = -1$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées puisque $\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

Par conséquent, la fonction $\boxed{x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2} \text{ est définie sur } [-1, 1[.}$

3.3. Le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence (c'est du cours).

Comme ce minimum vaut 1, il vient : $\boxed{\sum w_n x^n \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à } 1}$

Facilement, en utilisant le cours :

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{1}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}.$ donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}.}$

3.4. Rappelons que l'on sait que f est de classe C^∞ à l'intérieur de son disque ouvert de convergence.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\ f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)\end{aligned}$$

Et finalement : $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) f(x)}$

4. On va démontrer alors que pour tout $x \in [\,0, 1\,[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ en intégrant l'équation différentielle vérifiée par la fonction f obtenue à la question précédente :

f est strictement positive sur $[0, 1[$ car : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, a_0 > 1$, puis $\forall x \in [0, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n > 0$.

Alors sur $[0, 1[$, on a : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

En intégrant alors terme à terme la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence on obtient : $\int_0^x \dfrac{f'(u)}{f(u)}\, du = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n+2}\right) du$

Donc : $[\ln(|f(u)|)]_0^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ et comme $f(0) = 1$ et $\ln(f(0)) = 0$,

on obtient finalement : $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \ln(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}$

5. Sur $]0,1[$, on obtient en utilisant la décomposition en éléments simples proposée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) \mathrm{d}u - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x u^{n+1}\, \mathrm{d}u\,^1 \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-u}\, du - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{u}{1-u}\, du \\
&= [-\ln|1-u|]_0^x - \frac{1}{x}[-u - \ln(|1-u|]_0^x \\
&= -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} \\
\ln(f(x)) &= \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) = e \times (1-x)^{\frac{1}{x}-1} \text{ et } f(0) = e^0 = 1.}$

6. $\dfrac{1}{2} \in [0,1[$, donc $\sum a_n \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$.

Exercice 4.
Suite récurrente de matrices et probabilités

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1. On a $2M^2 = 3M - I_n$, donc : $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2) = \text{Vect}(I_n, M, -3M + I_n) = \text{Vect}(I_n, M)$.
On montre alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Initialisation : $M^0 = I_n \in \text{Vect}(I_n, M) = F$.
La propriété est donc vraie pour $k = 0$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $M^k \in F$.
Comme $M^k \in \text{Vect}(I_n, M)$, il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^k = a_k I_n + b_k M$,
Alors : $M^{k+1} = M^k M = a_k M + b_k M^2 = a_k M + b_k \dfrac{3M - I_n}{2} = \dfrac{2a_k + 3b_k}{2} M - \dfrac{b_k}{2} I_n$, donc $M^{k+1} \in \text{Vect}(I_n, M) = F$. D'où l'hérédité.
Conclusion : Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ M^k \in F}$

<u>Recherche d'une base de F</u> :

- Par construction de F, la famille (I_n, M) est génératrice de F.
- Démontrons que cette famille est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI_n + bM = 0$.

-> Si $b = 0$ alors $aI_n = 0$, donc $a = 0$.

-> Si $b \neq 0$, on a $M = \dfrac{a}{b} I_n$.

Comme $M = \dfrac{a}{b} I_n$, on a $M^2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 I_n$, donc $0_n = 2M^2 - 3M + I_n = (2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1) I_n$, et par suite $2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1 = 0$, ce qui donne $\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{1}{2}$, ou $\left(\dfrac{a}{b}\right) = 1$ ce qui est impossible puisque $M \neq I_n$ et $M \neq \dfrac{1}{2} I_n$: ce cas est donc impossible et $a = b = 0$.

Conclusion : la famille (I_n, M) est libre, et donc une base de F qui est ainsi de dimension 2.

1.2. Soit $(A, B) \in F^2$: d'après la question précédente,

$\exists(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \ A = \alpha_1 I_n + \alpha_2 M$ et $\exists(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \ B = \beta_1 I_n + \beta_2 M$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 I_n + \alpha_2 M)(\beta_1 I_n + \beta_2 M) \\ &= a_1 b_1 I_n + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) M + \alpha_2 \beta_2 M^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2) = F \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F \text{ est stable pour la mutliplication des matrices.}}$

1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \dfrac{1}{2} I_n$.

On remarque que A et B sont deux vecteurs de F.

On démontre que cette famille est libre.

$$\begin{aligned} \lambda A + \mu B = 0_F &\Leftrightarrow \lambda(M - I_n) + \mu(M - \frac{1}{2} I_n) = 0_F \\ &\Leftrightarrow (\lambda + \mu) M - \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) I_n = 0_F \end{aligned}$$

Or (I_n, M) étant libre, on a donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \dfrac{\mu}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu = 0 \\ \mu = -\dfrac{\mu}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$. Enfin, comme F est de dimension 2, $\boxed{(A, B) \text{ est une base de } F}$

On peut aussi calculer le déterminant de ces deux vecteurs dans la base $\mathscr{B} = (I_n, M)$:

$\det_{\mathscr{B}}(A, B) = \begin{vmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$: $\boxed{\text{la famille } (A, B) \text{ est une base de } F}$

On précise que A et B commutent (car M et I commutent). Alors :

$$\begin{aligned} BA = AB &= (M - I_n)\left(M - \frac{3}{2} I_n\right) \\ &= M^2 - \frac{3}{2} M + \frac{1}{2} I_n \\ &= 0_F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= (M - I_n)^2 \\ &= AB - \frac{1}{2} A \\ &= \frac{-1}{2} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(M - \frac{1}{2} I_n\right)^2 \\ &= BA + \frac{1}{2} B \\ &= \frac{1}{2} B \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } (A, B) : AB = BA = (0, 0),\ A^2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right),\ B^2 = \left(0, \frac{1}{2}\right).}$$

1.4. Utilisons la base (A, B) de F définie dans la question précédente.

Soit $T \in F : \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ T = \alpha A + \beta B$.

Alors : $T^2 = (\alpha A+\beta B)^2 = \alpha^2 A^2+\alpha\beta AB+\beta\alpha BA+\beta^2 B^2 = \dfrac{1}{2}(-\alpha A+\beta B)$ d'après la question précédente.
Comme $M = -A + 2B$, par unicité des coefficients dans la base, on résout :

$$\begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{2} = -1 \\ \dfrac{\beta^2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 2 \\ \beta^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{2} \\ \beta = \pm 2 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{T^2 = M \text{ si, et seulement si, } T \in \left\{\sqrt{2}A + 2B, \sqrt{2}A - 2B, -\sqrt{2}A + 2B, -\sqrt{2}A - 2B\right\}}$

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 2\,\mathbb{P}(X = n+2) = 3\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
(p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.
L'équation caractéristique associée $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux racines distinctes : 1 et $\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta 1^n.$$

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements et l'on a :

$$1 = P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha\frac{1}{2^n} + \beta\right).$$

Nécessairement, $\beta = 0$ (p_n est le terme général d'une série convergente, donc $\lim(p_n) = 0$).
Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\alpha}{1-\frac{1}{2}} = 2\alpha$, on en déduit : $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}}$

2.2. La série entière géométrique $\sum x^n$ ayant un rayon de convergence égal à 1, il en est de même pour les séries entières $\sum nx^n$ et $\sum n(n-1)x^n$ qui sont les séries entières dérivées termes à termes.
En les évaluant en $x = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que les séries $\sum n\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\sum n(n-1)\dfrac{1}{2^{n-2}}$ convergent, donc, $\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance}}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1$$

et

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) = \frac{1}{2^3}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 2$$

ce qui permet d'obtenir :

$$V(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 + 1 - 1 = 2.$$

$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \text{ et } V(X) = 2.}$

Exercice 5.

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2[X]$ et projection orthogonale.

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P|Q >= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. — P et Q sont des polynômes à coefficients réels, les polynômes dérivés le sont aussi et $< P, Q >$ est donc un réel.
$(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est donc à valeurs dans $\mathbb{R}$.
— La multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative donc $< , >$ est symétrique.
— De même ; la multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à l'addition et la dérivée est linéaire, donc $< , >$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Par symétrie et $< , >$ est bilinéaire.
— Soit $P \in E$. $< P, P >= P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geq 0$.
$< , >$ est donc positive.
— Si $< P, P >= 0$, alors $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ car une somme de carrés est nulle si, et seulement si, chacun des carrés est nul.
Donc 1 est une racine d'ordre au moins 3 de P, qui est de degré inférieur ou égal à 2 : P est donc le polynôme nul.
$< , >$ est donc définie.

En conclusion, $\boxed{< , > \text{ est bien un produit scalaire.}}$

2. On utilise le procédé d'orthonornalisation de *Graam-Schmidt* à partir de la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.
— Soit $R_0 = 1$.
$< R_0, R_0 >= 1 + 0 + 0$, on choisit $\boxed{P_0 = 1}$.
— Soit $R_1 = X + \alpha P_0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a $< P_0, R_1 >=< P_0, X > +\alpha < P_0, P_0 >=< P_0, X > +\alpha$
donc : $< P_0, R_1 >= 0 \Leftrightarrow \alpha = - < P_0, X >$.
Or : $< P_0, X >= 1.1 + 0.1 + 0.0 = 1$, on choisit donc $R_1 = X - 1$
$< R_1, R_1 >= 0^2 + 1^2 + 0^2$, doù, $\boxed{P_1 = X - 1}$.
— On pose $R_2 = X^2 + \alpha P_0 + \beta P_1$.
Comme $< P_0, R_2 >=< P_0, X^2 > +\alpha < P_0, P_0 > +\beta < P_0, P_1 >=< P_0, X^2 > +\alpha.1 + \beta.0$
et $< P_1, R_2 >=< P_1, X^2 > +\alpha < P_1, P_0 > +\beta < P_1, P_1 >=< P_0, X^2 > +\alpha.0 + \beta.1$
On résout

$$\begin{cases} < P_0, R_2 >= 0 \\ < P_1, R_2 >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha =< P_0, X^2 > \\ \beta =< P_1, X^2 > \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

On choisit $R_2 = X^2 - 2(X - 1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.
Comme $< R_2, R_2 >= 4$, on pose pour normer P_2 : $\boxed{P_2 = \frac{1}{2}(X - 1)^2}$.

Finalement : $\boxed{\left(1, X - 1, \frac{(X - 1)^2}{2}\right) \text{ est une base orthonormale de } E \text{ pour le produit scalaire considéré.}}$

3. Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$. On a :
$d(X^2-4,\mathbb{R}_1[X]) = ||X^2-4-p(X^2-4)||$ et $p(X^2-4) =< X^2-4, P_0 > P_0+ < X^2-4, P_1 > P_1$.
Or $< X^2-4, P_0 >= -3$ et $< X^2-4, P_1 >= 2$, d'où :

$$p(X^2-4) = -3P_0 + 2P_1 = 2X-5.$$

Donc, $d(X^2-4,\mathbb{R}_1[X]) = ||X^2-2X+1|| = 2$. $\boxed{d(X^2-4,\mathbb{R}_1[X]) = 2}$

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1)=0$.

4.1. H est un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire non nulle : $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) \end{cases}$.

$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.}}$

4.2. Soit ψ la projection orthogonale sur H.
(P_1, P_2) est une famille de polynômes de H qui forme une famille libre (car de degrés échelonnés), de cardinal 2, c'est donc une base de H.
De plus, $1 \in H^\perp$ car $1 \perp P_1$ et $1 \perp P_2$.
On a $\psi(1) = 0$, $\psi(P_1) = P_1$ et $\psi(P_2) = P_2$.
donc $\psi(X) = \psi(P_1+1) = P_1 = X-1$ et $\psi(X^2) = \psi(2P_2+2P_1+1) = 2P_2+2P_1 = X^2-1$, d'où :

$$\boxed{\mathrm{mat}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$