e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier naturel n.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n\geqslant 1, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

I. Étude de la suite des polynômes (T_n)

1°) Déterminer les polynômes T_2 et T_3.

2°) Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m \in \mathbb{N}$.

3°) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4°) a) Établir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \; ; \; T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx).$$

On rappelle que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, 2\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)$.

b) En déduire que $|T_n(u)| \leqslant 1$ pour $|u| \leqslant 1$.

c) Soit n un entier $\geqslant 1$. Montrer que, pour tout u dans $]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$ (on pourra poser $u = \mathrm{ch}(x)$).

d) En déduire que, pour tout n entier $\geqslant 1$ et pour tout u dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$.

5°) a) Pour tout n entier $\geqslant 1$, résoudre dans $[0, \pi]$ l´equation $T_n(\cos(x)) = 0$.

b) En déduire que, pour tout n entier $\geqslant 1$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.

c) Soit n un entier $\geqslant 1$. Donner la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

6°) Établir la convergence et calculer la somme des séries suivantes pour $|t| < 1$ et x réel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos(nx) \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(nx).$$

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel non nul et les n racines de T_n par $\cos(x_1)$, $\cos(x_2)$, ... , $\cos(x_n)$ où :

$$x_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \; k \in \{1, ..., n\}.$$

II.A) Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\cos(x))\, Q(\cos(x))\; \mathrm{d}\,x.$$

1°) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°) a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$. Calculer $\langle T_p, T_q \rangle$.

b) Calculer $\langle T_0, T_0 \rangle$ et $\langle T_n, T_n \rangle$.

c) En déduire que, pour $n \geqslant 1$, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d) En utilisant les questions I.2), II.A.2.b) et II.A.2.c), montrer que $\langle T_n, X^n \rangle = \frac{\pi}{2^n}$.

3 °) Montrer que la famille $(T_0, ..., T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$

II. B) Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(P) = \int_0^\pi P(\cos(x))\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(P) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\cos(x_k)).$$

1 °) On note, pour $j \in \{0, ..., n\}$, $c_j = \sum_{k=1}^{n} \cos(jx_k)$.

a) Calculer c_0.

b) Calculer pour $j \in \{1, ..., n-1\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{ij\frac{\pi}{n}})^k.$$

c) En déduire que, pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, $c_j = 0$.

2 °) a) Pour $p \in \{0, ..., n-1\}$, calculer $I(T_p)$ et $S_n(T_p)$.

b) En déduire que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

3 °) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n ; on a donc $P = QT_n + R$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a) Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) En déduire, en utilisant II.A.2.c), que $I(P) = I(R)$.

c) En déduire que, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

4 °) Calculer $I(T_{2n})$ et $S_n(T_{2n})$; qu'en conclut-on ?

T.S.V.P

III. Calcul approché d'une intégrale

On associe à toute fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(f) = \int_0^{\pi} f(\cos(x)) \, \mathrm{d}x \; ; \; S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\cos(x_k)).$$

1°) On admet le théorème sur les sommes de Riemann :

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. Soit p un entier naturel non nul. On pose pour k dans $\{0,...,p-1\}$, $\alpha_k = a + k\frac{b-a}{p}$. Alors, pour tous $c_0,...,c_k,...,c_{p-1}$ tels que, $\forall k \in \{0,...,p-1\}, c_k \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(c_k) = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = I(f)$.

2°) On suppose que f est l'application définie par $f(t) = \ln\left(a^2 - 2at + 1\right)$ où a est un réel tel que : $a > 0$ et $a \neq 1$.

a) Montrer que f est continue sur $[-1,1]$ et en déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = I(f)$.

b) i. Exprimer les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de -1 dans $\mathbb{C}$ en fonction de $x_1,...,x_n$ (on pourra les classer par conjugués).

ii. Donner la factorisation en irréductibles de $X^{2n}+1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

iii. En déduire que la factorisation en irréductibles de $X^{2n}+1$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - 2\cos(x_k)X + 1) \, .$$

iv. Montrer que :

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln\left(a^{2n}+1\right).$$

c) Donner la limite de $\frac{\pi}{n} \ln\left(a^{2n}+1\right)$ quand n tend vers $+\infty$ (on distinguera les cas : $a \in]0,1[, a \in]1,+\infty[$). En déduire la valeur $I(f)$ selon la valeur de a.

d) Donner un équivalent de $S_n(f) - I(f)$ quand n tend vers $+\infty$, en distinguant les cas $0 < a < 1$ et $a > 1$.

***