e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème

Partie I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Représenter la courbe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. En énonçant précisément le théorème utilisé, justifier la convergence de la série de Fourier de f vers f. De quel type de convergence s'agit-il?
5. En déduire les égalités :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \frac{-\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Partie II

Pour tout entier naturel n, on note f_n l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]0,1], f_n(t) = t^n \ln(t).$$

1. Soit n un entier naturel. Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1]$ et calculer la valeur de l'intégrale :
$$u_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Soient g et h les applications de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in]0,1[, g(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} \text{ et } h(t) = \frac{\ln(t)}{t+1}.$$

2. (i) Vérifier la convergence simple de la série des applications f_n et de la série des applications $(-1)^n f_n$ sur $]0,1[$ et exprimer leurs sommes en fonction de g et h.

   (ii) En énonçant précisément le théorème utilisé, justifier que g et h sont intégrables sur $]0,1[$ et déterminer les valeurs des intégrales :
$$I = \int_0^1 g(t)\,dt \text{ et } J = \int_0^1 h(t)\,dt.$$

   On utilisera I5.

Partie III

Pour tout entier naturel n, on note h_n l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]0,1], h_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{t+1}.$$

1. Pour tout entier naturel n, montrer que h_n est intégrable sur $]0,1]$.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^1 h_n(t)\,dt.$$

2. A l'aide du théorème de convergence dominée (dont on rappellera l'énoncé), montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. (i) Montrer que la série de terme général J_n converge et exprimer sa somme S à l'aide d'une intégrale.

   (ii) En déduire une expression de S en fonction des intégrales I et J définies dans la partie II, puis vérifier que :
$$S = \frac{-\pi^2}{8}.$$

4. En énonçant précisément le théorème utilisé, justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n J_n$.

Partie IV

On se propose dans cette partie de déterminer un équivalent de l'intégrale J_n lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout entier naturel n, on pose $R_n = (-1)^n J_n$.

1. Pour tout entier naturel n, comparer $J_n + J_{n+1}$ et u_n défini dans la partie II. En déduire que $R_n = R_{n+1} + (-1)^n u_n$.

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :
$$R_{2n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}.$$

4. Pour tout entier $k \geqslant 1$, justifier l'encadrement :
$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{4t^3}dt \leqslant \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{4t^3}dt.$$

5. En déduire un encadrement de R_{2n+1}, pour tout $n \geqslant 1$.

6. En déduire la convergence et les limites respectives des suites $((2n+1)^2 R_{2n+1})$ et $((2n)^2 R_{2n})$.

7. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 J_n)$ et conclure.

Partie V

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \ \|$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \|P\| = \max\{|a_i| \ ; \ i \in \{0, ..., n\}\}, \ \text{ si } \ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'une norme.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} T & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)\ln(t)}{(1+t)} dt \end{array}.$$

1. Justifier que $T(P)$ est défini, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que T est une forme linéaire.
3. Montrer qu'il existe une constante K telle que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ |T(P)| \leqslant K\|P\|.$$
4. En déduire que T est lipchitzienne de $(\mathbb{R}[X], \| \ \|)$ vers $(\mathbb{R}, | \ |)$.
5. Justifier que l'ensemble $\{|T(P)| \ ; \ P \in \mathbb{R}[X] \, / \, \|P\| = 1\}$ est borné et calculer :
$$\|T\| = \sup_{\{P \in \mathbb{R}[X] \, / \, \|P\|=1\}} |T(P)|.$$