

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2, PC, 2020

CENTRALE-SUPÉLEC

I - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

L'énoncé propose ici de généraliser la notion de fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète au delà des variables à support dans \mathbb{N} .

I.A – Premières propriétés

Q 1. Par application de la formule de transfert dans le cas où $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout réel t :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(X = x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^r a_k e^{itx_k}.$$

Q 2. Soit $t \in \mathbb{R}$: $\sum_{n \geq 0} a_n$ est (absolument) convergente (de somme 1), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n e^{itx_n}| \leq a_n$ donc

$\sum_{n \geq 0} a_n e^{itx_n}$ converge absolument. On applique alors la formule de transfert à nouveau, dans le cas où $X(\Omega)$ est un

ensemble dénombrable : $\sum_{n \geq 0} a_n e^{itx_n}$ converge absolument et $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$.

Ainsi, Φ_X est définie sur \mathbb{R} .

Q 3. Remarque : si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut compléter ce support en une famille dénombrable avec des valeurs entières arbitraires que X ne prend presque sûrement jamais. On supposera par la suite, sauf mention particulière du sujet, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable, ce qui est le cas le plus compliqué et ce qui évite le caractère répétitif de deux raisonnements quasi identiques.

On peut remarquer que, dans **Q 2.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, |a_n e^{itx_n}| \leq a_n \text{ (majoration uniforme)}$$

donc la série de fonctions continues $(f_n : t \mapsto a_n e^{itx_n})_{n \geq 0}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} et sa fonction somme, Φ_X , est continue sur \mathbb{R} .

Dans le cas d'un support fini, il ne s'agit que d'une somme finie de fonctions continues.

Q 4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par application du théorème de transfert, là encore, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{it(ax_n+b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{iatx_n} e^{itb} = \Phi_X(at) e^{itb}.$$

Q 5. On suppose, comme préalablement expliqué, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable. Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i(-t)x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{e^{itx_n}} = \overline{\Phi_X(t)}.$$

Ainsi, Φ_X est paire si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(-t) = \Phi_X(t)$, c'est-à-dire si et seulement si $\Phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

I.B – Trois exemples (tirés directement du cours !)

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$; si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, X suit la même loi qu'une somme $X_1 + \dots + X_n$ de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \prod_{k=1}^n (qe^{i0t} + pe^{it}) = (q + pe^{it})^n.$$

Q 7. Soient $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} pe^{it} (qe^{it})^{n-1} = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$$

(somme des termes d'une série géométrique de raison qe^{it} de module $q < 1$).

Q 8. Soient $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} e^{int} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{it})$$

(somme des termes de la série exponentielle pour l'exposant λe^{it}).

I.C – Image de Φ_X

Q 9. On peut supposer, par défaut, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n e^{itx_n}| \leq a_n$ (terme général d'une série convergente) donc, par majoration terme à terme de ces séries absolument convergentes, on a :

$$|\Phi_X(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n e^{itx_n}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

Q 10. On suppose que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_n = a + \frac{2\pi k_n}{t_0}$. On a alors :

$$|\Phi_X(t_0)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(it_0 x_n) \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{iat_0} \exp(i2\pi k_n) \right| = \left| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) e^{iat_0} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

Q 11. On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi_X(t_0)| = 1$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_X(t_0) = e^{i\theta}$. En posant $a = \frac{\theta}{t_0}$, on a :

$$\Phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(it_0 x_n) = e^{iat_0} \Rightarrow \Phi_X(t_0) e^{-iat_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i(t_0 x_n - t_0 a)) = 1.$$

Q 12. En particulier, la partie réelle de $\Phi_X(t_0)$ vaut 1 et donc :

$$\operatorname{Re}(\Phi_X(t_0)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(it_0 x_n) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0.$$

Q 13. Comme cette série est à termes positifs, cette somme n'est nulle que si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0 \Rightarrow a_n = 0 \text{ ou } \cos(t_0 (x_n - a)) = 1$$

donc, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. On peut donc conclure à la propriété réciproque de la question **Q 10** sur le support de X dans le cas où Φ_X n'est pas toujours de module strictement inférieur à 1 en dehors du point 0 :

$$\mathbb{P}\left(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = x_n \text{ et } X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbb{1}(x_n) = 0 \text{ (formule des probabilités totales)}$$

(où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice de la partie complémentaire de $a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C}) donc $\mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

II - Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II.A – Première méthode

II.A.1) – On suppose que et on reprend les notations de la question 1.

Q 15. $X(\Omega)$ est supposé fini. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$:

$$V_m(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi_X(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{n=1}^r e^{ix_n t} \mathbb{P}(X = x_n) e^{-imt} dt = \sum_{n=1}^r \mathbb{P}(X = x_n) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(x_n - m)t} dt.$$

Cette dernière intégrale vaut $2T$ si $x_n = m$ et $\frac{e^{i(x_n-m)T} - e^{-i(x_n-m)T}}{i(x_n-m)} = \frac{2i \sin((x_n-m)T)}{i(x_n-m)}$ sinon; cette disjonction de cas est identique à celle de la définition du sinus cardinal : $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(x_n-m)t} dt = 1$ si $(x_n-m)T = 0$ et $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(x_n-m)t} dt = \frac{\sin((x_n-m)T)}{T(x_n-m)} = \text{sinc}(T(x_n-m))$ si $(x_n-m)T \neq 0$:

$$V_m(T) = \sum_{n=1}^r \text{sinc}(T(x_n-m)) \mathbb{P}(X = x_n) .$$

Q 16. Soit $n \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Si $x_n = m$, $\text{sinc}(T(x_n-m)) \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(X = m)$ pour tout $T > 0$. Si $x_n \neq m$, $T \mapsto \text{sinc}(T(x_n-m)) \mathbb{P}(X = x_n)$ est bornée sur $]0, +\infty[$ alors que $|T(x_n-m)| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par quotient de limites, on a :

$$\text{sinc}(T(x_n-m)) \mathbb{P}(X = x_n) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 .$$

Ainsi, que m appartienne ou non au support de X (disjonction de cas, identique pour la question 20), par somme de ces r limites, on a :

$$V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m) .$$

II.A.2) – On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \text{sinc}\left(\frac{x_n-m}{h}\right) \mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 17. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{itx_n}$ de fonctions continues sur le segment $[-T, T]$ converge normalement donc uniformément ce qui justifie le théorème d'interversion entre la somme et l'intégrale sur ce segment; comme dans la question 15, on obtient :

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{sinc}(T(x_n-m)) \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right) .$$

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque sinc est continue sur \mathbb{R} , par composition avec la fonction inverse, g_n est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, par quotient de limites, sinc étant bornée, sinc admet pour limite 0 en $+\infty$. Ainsi, par composition de limites, g_n se prolonge par continuité en 0 en une fonction \tilde{g}_n définie et continue sur \mathbb{R}^+ telle que $\tilde{g}_n(0) = \mathbb{P}(X = x_n)$ si $x_n = m$ et 0 sinon.

Q 19. Comme le sinus cardinal est bornée et admet un pour maximum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, \tilde{g}_n est bornée sur \mathbb{R}^+ , avec $\|\tilde{g}_n\|_\infty \leq \mathbb{P}(X = x_n)$ (la majoration suffit). Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \tilde{g}_n$ converge normalement donc uniformément sur \mathbb{R}^+ vers

sa fonction somme et $G = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

Q 20. Par continuité de G en 0 et composition des limites, on a :

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n\left(\frac{1}{T}\right) = G\left(\frac{1}{T}\right) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} G(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0) = \mathbb{P}(X = m) .$$

II.A.3) – Application

Q 21. Soient $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\Phi_X = \Phi_Y$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = m) = \lim_{T \rightarrow +\infty} V_m(T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi_X(t) e^{-imt} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi_Y(t) e^{-imt} dt = \mathbb{P}(Y = m) .$$

II.B – Deuxième méthode

Q 22. La série exponentielle est de rayon de convergence infini donc, pour tout $t \neq 0$ en particulier, on a :

$$\begin{aligned} e^{itb} - e^{ita} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(itb)^n}{n!} - \frac{(ita)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} (b^n - a^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} (b^n - a^n) \\ &\Rightarrow K_{a,b} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{2it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n (b^{n+1} - a^{n+1})}{2(n+1)!} t^n \end{aligned}$$

de terme constant $\frac{b-a}{2}$.

Ainsi, $K_{a,b}$ est développable en série entière sur \mathbb{R} (rayon de convergence infini) et donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Q 23. Soit N un entier naturel non nul (le cas $N = 0$ étant sans intérêt). F_N est une fonction de type intégrale à paramètre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto K_{a,x}(t)$ est continue sur le segment $[-N, N]$ donc intégrable; pour tout $t \in [-N, N]$,

$$x \mapsto K_{a,x}(t) = \begin{cases} \frac{e^{itx}}{2it} - \frac{e^{ita}}{2it} & \text{si } t \neq 0, \\ \frac{x-a}{2} & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } (x, t) \mapsto \frac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{itx} & \text{si } t \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0, \end{cases}, \text{ c'est-à-dire}$$

$\frac{1}{2} e^{itx}$, continue donc intégrable par rapport à t sur le segment $[-N, N]$; enfin, il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}$ continue donc intégrable sur $[-N, N]$ telle que : $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-N, N]$, $\left| \frac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x} \right| \leq \varphi(t)$ donc F_N est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a :

$$F'_N(x) = \int_{-N}^N \frac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x} dt = \begin{cases} \frac{1}{2ix} (e^{iNx} - e^{-iNx}) & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{2N}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} = N \operatorname{sinc}(Nx).$$

Q 24. On remarque que $F_N(a) = 0$; on a donc, puisque F_N est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = F_N(b) = F_N(a) + \int_a^b F'_N(x) dx = \int_a^b N \operatorname{sinc}(Nx) dx = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s) ds$$

par le changement de variable $x \mapsto s = Nx$, de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Q 25. Puisque sinc est continue sur \mathbb{R} , elle l'est en particulier sur $[0, \pi]$ donc l'intégrale $\int_0^\pi \operatorname{sinc}(s) ds$ est convergente.

De plus, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$, on a :

$$\int_\pi^x \operatorname{sinc}(s) ds = \int_\pi^x \frac{\sin s}{s} ds = \left[-\frac{\cos s}{s} \right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos s}{s^2} ds = -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^x \frac{\cos s}{s^2} ds$$

par intégration par parties ($u(s) = \frac{1}{s}$ et $v(s) = -\cos s$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[\pi, +\infty[$). Or pour tout $s \in [\pi, +\infty[$, $\left| \frac{\cos s}{s^2} \right| \leq \frac{1}{s^2}$, continue et intégrable sur $[\pi, +\infty[$ (critère de Riemann), cette dernière intégrale est absolument convergente donc admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$ (ainsi que $\frac{\cos x}{x}$!) : $\int_\pi^{+\infty} \operatorname{sinc}(s) ds$ est elle aussi convergente.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(s) ds$ est convergente.

Q 26. On admet : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \operatorname{sinc}(s) ds = \int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(s) ds = \frac{\pi}{2}$. De plus, la fonction sinc est paire, par quotient de fonctions impaires sur \mathbb{R}^* , on a aussi : $-\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \operatorname{sinc}(s) ds = \int_{-\infty}^0 \operatorname{sinc}(s) ds = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, $\int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = \int_0^{Nb} \operatorname{sinc}(s) ds - \int_0^{Na} \operatorname{sinc}(s) ds$, ce qui conduit par composition de limites, à la disjonction de cas suivant si a et b sont nuls ou suivant leurs signes (strictes) respectifs, dans le cas où $a < b$:

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = 0$

si $a < b < 0$ ou $0 < a < b$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = \frac{\pi}{2}$ si $0 = a < b$ ou $a < b = 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = \pi$ si $a < 0 < b$.

Q 27. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les réels a et b n'appartiennent pas à $X(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \Phi_X(-t) K_{a,b}(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \sum_{k=1}^r a_k e^{-itx_k} K_{a,b}(t) dt = \sum_{k=1}^r a_k \left(\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N K_{a-x_k, b-x_k}(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^r a_k \left(\frac{1}{\pi} \int_{N(a-x_k)}^{N(b-x_k)} \operatorname{sinc}(s) ds \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(X = x_k) \mathbb{1}(a < x_k < b) = \mathbb{P}(a < X < b) \end{aligned}$$

car, pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $a - x_k$ et $b - x_k$ ne sont pas nuls par hypothèse, donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{N(a-x_k)}^{N(b-x_k)} \operatorname{sinc}(s) \, ds = \begin{cases} \pi & \text{si } a < x_k < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

III - Régularité de Φ_X

III.A -

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq k$. Soit $x \in \mathbb{R}$: si $|x| \leq 1$, $|x|^j \leq 1 \leq 1 + |x|^k$ et si $|x| > 1$, $|x|^j \leq |x|^k \leq 1 + |x|^k$. Ainsi, $|x|^j \leq 1 + |x|^k$.

Par conséquent, par majoration du terme général d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente (par somme de séries convergentes), on a : $\sum_{n \geq 0} a_n |x_n|^k$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ convergent donc $\sum_{n \geq 0} a_n x_n^j$ absolument et X admet un moment d'ordre j .

Q 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto a_n e^{itx_n}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc en particulier, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ de \mathcal{C}^j sur \mathbb{R} avec $f_n^{(j)} : t \mapsto a_n (ix_n)^j e^{itx_n}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|a_n (ix_n)^j e^{itx_n}| \leq a_n |x_n|^j$ (majoration uniforme par le terme général d'une série numérique convergente) : la série de fonctions $\left(f_n^{(j)} \right)_{n \geq 0}$ converge normalement (donc simplement si $j < k$ et uniformément si $j = k$) sur \mathbb{R} et sa fonction somme, Φ_X , est continue sur \mathbb{R} . Par application du théorème de dérivation (terme à terme) d'une série de fonction, la fonction somme Φ_X de la série de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n i^k x_n^k e^{itx_n}.$$

Q 30. D'après la question précédente, on a donc :

$$\Phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n i^k x_n^k = i^k \mathbb{E}(X^k) \Rightarrow \mathbb{E}(X^k) = (-1)^k i^k < \Phi_X^{(k)}(0).$$

III.B -

Q 31. Φ_X est supposée de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} donc Φ_X admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (Taylor-Young) :

$$\begin{aligned} 2\Phi_X(0) - \Phi_X(2h) - \Phi_X(-2h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} 2\Phi_X(0) - \left(\Phi_X(0) + \Phi_X'(0)(2h) + \frac{\Phi_X''(0)}{2}(2h)^2 \right) \\ &- \left(\Phi_X(0) + \Phi_X'(-2h) + \frac{\Phi_X''(0)}{2}(-2h)^2 \right) + o(h^2) = 4h^2 \Phi_X''(0) + o(h^2) \Rightarrow f(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} \Phi_X''(0). \end{aligned}$$

Q 32. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Par combinaison linéaire de séries convergentes, on :

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{4h^2} \left(2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2ihx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-2ihx_n} \right) = \frac{1}{4h^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (2 - 2 \cos(2hx_n)) \right) \\ &= \frac{1}{4h^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 4 \sin^2(hx_n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}. \end{aligned}$$

Q 33. Soit $N \in \mathbb{N}$: pour tout $h > 0$, $\sum_{n=0}^N a_n x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) = f(h)$ (somme partielle d'une série à termes positifs), donc par prolongement des inégalités, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N a_n x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) = \sum_{n=0}^N a_n x_n^2 = S_N \leq \Phi_X''(0).$$

Par majoration des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} a_n x_n^2$ (à termes positifs), la série converge (absolument) et X admet un moment d'ordre 2.

III.C –

Q 34. Avec les notations de la question **Q 2.**, $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^{2k}$, série à termes positifs, donc si α est nul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) x_n^{2k} = 0$ donc X est presque sûrement nulle.

Q 35. Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y(\Omega) = X(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = x_n) = \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha}$. On remarque, en particulier, que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = x_n) = 1$ et donc que la loi de Y est bien définie.

Par application de la question **Q 29.**, avec les hypothèses proposées, Φ_X , est de classe \mathcal{C}^{2k} sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X^{(2k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^k x_n^{2k} e^{itx_n} = \alpha (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = x_n) e^{itx_n}$$

donc $\Phi_Y = \frac{1}{\alpha} (-1)^k \Phi_X^{(2k)}$ donc Φ_Y est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Q 36. D'après **III.B**, Y admet un moment d'ordre 2 avec $\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = x_n) x_n^2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) x_n^{2k+2}$ donc X admet un moment d'ordre $2k + 2$.

Q 37. Par une récurrence simple, on montre alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si Φ_X est de classe \mathcal{C}^{2k} sur \mathbb{R} , alors X admet un moment d'ordre $2k$: l'initialisation a été établie pour $k = 1$ en **III.B** et, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, si on suppose la propriété établie au rang k et que Φ_X est de classe \mathcal{C}^{2k+2} sur \mathbb{R} , alors elle est de classe \mathcal{C}^{2k} et X admet un moment d'ordre $2k$ par hypothèse de récurrence et X admet un moment d'ordre $2k + 2$ d'après la question précédente (hérédité). On peut donc conclure par principe de récurrence à cette propriété pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

IV - Développement en série entière de Φ_X

IV.A –

Q 38. $X(\Omega)$ est supposé fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$; on a, pour tout réel t , puisque la série exponentielle est de rayon de convergence infini :

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=1}^r a_k e^{itx_k} = \sum_{k=1}^r a_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itx_k)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^r a_k x_k^n \right) \frac{i^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) t^n$$

par linéarité des sommes de séries convergentes.

Ainsi Φ_X est développable en série entière sur \mathbb{R} et, pour tout réel t , $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$.

IV.B –

Q 39. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$. Par application de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à $x \mapsto e^{ix}$ de classe \mathcal{C}^∞ donc de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} &= \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!} i^{n+1} e^{ix} dx \\ \Rightarrow \left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| &\leq \left| \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!} i^{n+1} e^{ix} dx \right| = \left| \int_0^y \frac{|y-x|^n}{n!} dx \right| = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Q 40. Soit $t \in \left[-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \Phi_X(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k) \right| &= \left| \mathbb{E} \left(e^{itX} - \sum_{k=0}^n \frac{(itX)^k}{k!} \right) \right| \leq \mathbb{E} \left| e^{itX} - \sum_{k=0}^n \frac{(itX)^k}{k!} \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left(\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \frac{|t|^{n+1} \mathbb{E}|X|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

qui, d'après l'hypothèse proposée et la formule de Stirling est $\mathcal{O} \left(|t|^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{R^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}} \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right)$ et donc

$\mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$ converge vers $\Phi_X(t)$ et on a : $\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k)$.