

# Centrale-Supélec 2018 - Filière PC

## Corrigé de l'épreuve Mathématiques 2

Damien Broizat  
Lycée Jules Ferry, Cannes

### I Fonction zêta

**Q 1.** La série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  converge si et seulement si  $x > 1$ , donc  $\mathcal{D}_\zeta = ]1; +\infty[$ .

**Q 2.** En posant  $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$ , la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge normalement sur tout intervalle réel  $[a; +\infty[$  avec  $a > 1$ , puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq a, |\frac{1}{n^x}| \leq \frac{1}{n^a}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$  converge.

Il y a donc convergence uniforme sur tout intervalle  $[a; +\infty[$ . Puisque les  $g_n$  sont continues sur  $[a; +\infty[$ , on en déduit que  $\zeta$  est continue sur  $[a; +\infty[$ . Ceci étant vrai pour tout  $a > 1$ , on en conclut que  $\zeta$  est continue sur  $]1; +\infty[$ .

**Q 3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln(n)}$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$ , donc par somme (infinie), la fonction  $\zeta$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

**Q 4.** La fonction  $\zeta$  est décroissante (d'après **Q 3.**) et minorée par 0 (c'est une limite simple de fonctions positives), donc elle possède une limite réelle positive en  $+\infty$ .

**Q 5.** Fixons  $x > 1$  et  $n \geq 2$ . Par décroissance de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  (qui est bien continue par morceaux...) sur les intervalles  $[n; n+1]$  et  $[n-1; n]$ , on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x},$$

ainsi que

$$\int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x} \geq \int_{n-1}^n \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}.$$

Cela donne l'encadrement voulu :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}.$$

**Q 6.** Fixons un réel  $x > 1$  et un entier  $N \geq 2$ . En sommant les inégalités obtenues en **Q 5.** pour  $n = 2 \dots N$ , on obtient :

$$\sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x},$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles)

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x},$$

ou encore

$$\frac{(N+1)^{1-x} - 2^{1-x}}{1-x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \frac{N^{1-x} - 1}{1-x}.$$

En faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$  et en ajoutant 1, on obtient (puisque  $1-x < 0$ ) :

$$1 - \frac{2^{1-x}}{1-x} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 - \frac{1}{1-x},$$

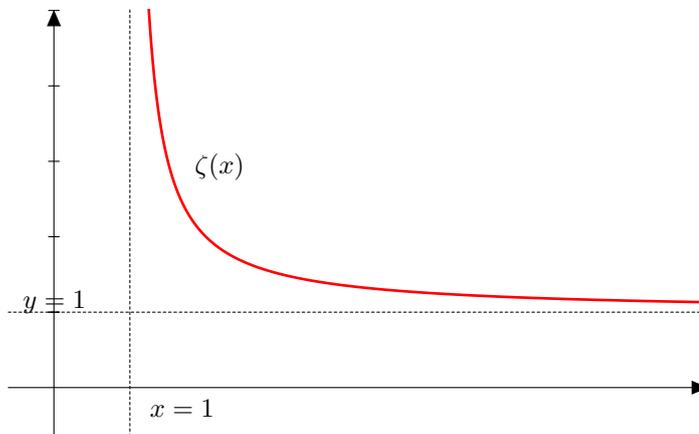
c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

**Q 7.** Puisque  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2^{x-1}}}\right) = +\infty$ , la minoration de  $\zeta(x)$  obtenue en **Q 6.** montre que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$ .

**Q 8.** Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2^{x-1}}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 1$ , l'encadrement obtenu en **Q 6.** montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ .

**Q 9.** Courbe représentative de  $\zeta$  :



## II Etude d'une fonction définie par une somme

**Q 10.** Posons  $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$ , donc puisque  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , on a  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$ .

Réciproquement, si  $x \in \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  converge, puisque si  $x = 0$ ,  $f_n(x) = 0$ , et si  $x \neq 0$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n^2}$ .  
On a donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$ .

**Q 11.** On a  $\mathcal{D}_f = ]-1; +\infty[ \cup \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} ]-k-1; -k[ \right)$ .

Soit  $[a; b]$  un segment inclus dans l'un des intervalles disjoints constituant  $\mathcal{D}_f$ .

Les fonctions  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$  étant décroissantes sur  $[a; b]$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b]$ ,  $f_n(b) \leq f_n(x) \leq f_n(a)$ , donc  $|f_n(x)| \leq \max\{|f_n(a)|; |f_n(b)|\} \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$ .

Or, pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ , la série  $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$  converge (vu que  $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$  pour  $x \neq 0$ ), donc

la série  $\sum_{n \geq 1} (|f_n(a)| + |f_n(b)|)$  converge. Ceci montre que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur tout segment  $[a; b] \subset \mathcal{D}_f$ . Les fonctions  $f_n$  étant continues sur  $\mathcal{D}_f$ , on en déduit que  $f$  est continue sur tout segment de  $\mathcal{D}_f$ , donc sur  $\mathcal{D}_f$ .

Enfin, les fonctions  $f_n$  sont décroissantes sur chaque intervalle de  $\mathcal{D}_f$ , donc leur somme (infinie)  $f$  est décroissante sur chaque intervalle de  $\mathcal{D}_f$  (**attention, pas sur  $\mathcal{D}_f$  !**).

**Q 12.** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a (par télescopage et changements d'indices) :

$$\begin{aligned} f(k) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n} \right) = - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+k} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+k} \right) = 0$ , on en déduit que  $f(k) = - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} = - \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right)$ .

**Q 13.** On utilise d'abord une comparaison série-intégrale pour encadrer  $f(k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , puis on utilisera la décroissance de  $f$  sur  $]1; +\infty[$  pour encadrer  $f(x)$  pour tout réel  $x \geq 1$ .

Par décroissance de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sur  $[1; +\infty[$ , on a

$$\forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t},$$

donc pour tout entier  $k \geq 2$  :

$$\sum_{n=2}^k \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} \leq \sum_{n=2}^k \int_{n-1}^n \frac{dt}{t},$$

c'est-à-dire

$$\ln(k+1) - \ln(2) \leq \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} \leq \ln(k).$$

En ajoutant 1 et en utilisant le résultat de **Q 12.**, on obtient l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad -\ln(k) - 1 \leq f(k) \leq -\ln(k+1) + \ln(2) - 1$$

(il reste trivialement vrai pour  $k = 1$ ).

Soit maintenant un réel  $x \geq 1$ . En notant  $k$  la partie entière de  $x$ , on a  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $k \leq x \leq k+1$ . La décroissance de  $f$  et les encadrements précédents impliquent alors :

$$-\ln(k+1) - 1 \leq f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \leq -\ln(k+1) + \ln(2) - 1,$$

ce qui entraîne (puisque  $\ln(x) \leq \ln(k+1) \leq \ln(x+1)$ ) :

$$-\ln(x+1) - 1 \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(2) - 1,$$

ou encore

$$-\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(2) - 1.$$

En divisant par  $\ln(x)$  pour  $x > 1$ , on obtient :

$$-1 - \frac{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{\ln(x)} \leq -1 + \frac{\ln(2) - 1}{\ln(x)}.$$

Cet encadrement donne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln(x)} = -1$ , donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(x)$ .

**Q 14.** Soit  $x \in \mathcal{D}_f$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si  $x+k$  est un entier strictement négatif  $p$ , alors  $x = p - k$  aussi, ce qui est contradictoire. Donc  $x+k \in \mathcal{D}_f$ .

En reprenant la technique de télescopage de la question **Q 12.**, on a

$$\begin{aligned} f(x+k) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+x+k} - \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n+x+k} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+x} \right) \\ &= -\sum_{n=1}^k \frac{1}{n+x} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N+1+x} + \dots + \frac{1}{N+k+x} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N+1+x} + \dots + \frac{1}{N+k+x} \right) = 0$ , on en déduit que  $f(x+k) - f(x) = -\sum_{n=1}^k \frac{1}{n+x}$ .

**Q 15.** D'après **Q 14.**, on a

$$\forall (x, k) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{N}^*, \quad f(x) = f(x+k) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+k}.$$

Or, par continuité de  $f$  en 0,  $\lim_{x \rightarrow -k} f(x+k) = f(0) = 0$ , et  $x \mapsto \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n}$  possède une limite finie lorsque  $x \rightarrow -k$ . Puisque  $\frac{1}{x+k}$  tend vers  $\pm\infty$  lorsque  $x \rightarrow -k$ , on en déduit que

$$f(x+k) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n} = o\left(\frac{1}{x+k}\right), \text{ et donc } f(x) \underset{x \rightarrow -k}{\sim} \frac{1}{x+k}.$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow -k^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -k^-} f(x) = -\infty$ .

**Q 16.** Puisque  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta(k+1) = 1$  (d'après **Q 8.**), on a  $|(-1)^k \zeta(k+1)x^k| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^k$  donc, tout comme la série géométrique  $\sum_{k \geq 1} |x|^k$ , la série entière  $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \zeta(k+1)x^k$  converge absolument si  $|x| < 1$

et diverge grossièrement si  $|x| > 1$ . Son rayon de convergence est donc égal à  $R = 1$ .

En  $x = \pm 1$ , il y a divergence grossière de la série entière, puisque le module du terme général tend vers 1.

**Q 17.** Les fonctions  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$ , avec

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{D}_f, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} (x+n)^{-1} = (-1) \cdots (-k)(x+n)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

On sait déjà (cf. **Q 11.**) que  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $\mathcal{D}_f$ .

Pour montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}_f$ , il suffit de montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la série  $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment  $[a; b] \subset \mathcal{D}_f$ . C'est le cas puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \forall n > -a, \quad |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{|x+n|^{k+1}} = \frac{k!}{(x+n)^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n+a)^{k+1}},$$

(dans ces conditions,  $x+n \geq a+n > 0$ ) et la série  $\sum_{n > -a} \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$  converge (car  $k+1 \geq 2$ ).

Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions nous donne alors :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{D}_f, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

**Q 18.** Fixons  $x \in ]-1; 1[$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $n+x \geq 1+x > 0$ , donc d'après l'expression de  $f^{(k)}$  obtenue en **Q 17.** :

$$|f^{(k)}(x)| = k! \left( \frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \right) \leq k! \left( \frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{k+1}} \right),$$

c'est-à-dire

$$|f^{(k)}(x)| \leq k! \left( \frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \zeta(k+1) \right) \leq k! \left( \frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \zeta(2) \right)$$

(par décroissance de  $\zeta$ ), d'où la majoration voulue avec  $A = \zeta(2)$ .

**Q 19.** Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$ . On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n$  à la fonction  $f$  :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

avec  $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$

Puisque  $f(0) = 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(0) = (-1)^k k! \zeta(k+1)$  (d'après **Q 17.**), on a

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \zeta(k+1) x^k + R_n(x),$$

donc il suffit de montrer que  $\forall x \in ]-1; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$  pour établir que  $f$  est développable en série entière sur  $] - 1; 1[$ . Pour cela, majorons  $R_n(x)$  à l'aide de **Q 18.** :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x-t|^n |f^{(n+1)}(t)| dt \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x-t|^n (n+1)! \left( A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) dt \right|,$$

c'est-à-dire

$$|R_n(x)| \leq (n+1) \left| \int_0^x |x-t|^n \left( A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) dt \right|.$$

Procédons en fonction du signe de  $x$  :

- Si  $0 \leq x < 1$ , alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1) \int_0^x (x-t)^n \underbrace{\left( A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right)}_{\leq A+1} dt \\ &\leq (A+1)(n+1) \int_0^x (x-t)^n dt = (A+1)x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

- Si  $-1 < x < 0$ , alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1) \int_x^0 (t-x)^n \left( A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) dt \\ &= (n+1) \left( A \int_x^0 (t-x)^n dt + \int_x^0 \left( \frac{t-x}{t+1} \right)^n \times \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \\ &= A(-x)^{n+1} + (n+1) \int_x^0 \left( 1 - \frac{1+x}{1+t} \right)^n \times \frac{dt}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Vu que la fonction  $t \mapsto 1 - \frac{1+x}{1+t}$  est croissante et positive sur l'intervalle  $[x; 0]$ , on a

$$\forall t \in [x; 0], \quad \left( 1 - \frac{1+x}{1+t} \right)^n \leq (-x)^n,$$

et donc

$$|R_n(x)| \leq A(-x)^{n+1} + (n+1)(-x)^n \int_x^0 \frac{dt}{(1+t)^2} = (-x)^{n+1} \left( A + \frac{n+1}{1+x} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(par croissances comparées).

Dans tous les cas, on a donc  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui amène :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \zeta(k+1) x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.$$

**Q 20.** Pour tout réel  $x$ , la fonction  $t \mapsto \frac{t^x-1}{1-t}$  est continue sur  $]0; 1[$ .

L'intégrale proposée est faussement impropre en 1, car en posant  $u = 1-t$ , on a

$$\frac{t^x-1}{1-t} = \frac{(1-u)^x-1}{u} = \frac{1-xu+o(u)-1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} -x,$$

donc la fonction se prolonge continûment en 1.

En outre,  $\frac{t^x-1}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x - 1$ , et l'intégrale  $\int_0^1 t^x dt$  converge si et seulement si  $x > -1$ , donc

l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt$  converge si et seulement si  $x > -1$ .

**Q 21.** Fixons  $x > -1$ . Puisque  $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$  pour tout  $t \in [0; 1[$ , on a

$$\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt = \int_0^1 (t^x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) dt,$$

en posant  $h_n(t) = (t^x-1)t^n$ . On applique alors le théorème d'intégration terme à terme à la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : chaque  $h_n$  est continue (par morceaux) sur  $]0; 1[$ , de signe constant (opposé à celui de  $x$ ), intégrable car  $|h_n(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^\alpha$  avec  $\alpha = \min(n, n+x) > -1$ , et on a

$$\int_0^1 |h_n(t)| dt = \pm \int_0^1 h_n(t) dt = \left| \int_0^1 (t^{n+x} - t^n) dt \right| = \left| \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{|x|}{(n+x+1)(n+1)}.$$

De plus, la série  $\sum_{n \geq 0} h_n$  converge simplement sur  $]0; 1[$  vers la fonction continue  $t \mapsto \frac{t^x - 1}{1 - t}$ , et enfin, la série  $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |h_n(t)| dt$  converge, puisque  $\int_0^1 |h_n(t)| dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$  pour  $x \neq 0$ .  
 Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1} \right) = f(x).$$

**Q 22.** Le résultat établi en **Q 19.** montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^k \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Pour exprimer  $f^{(k)}(0)$  sous forme intégrale, appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral (version  $\mathcal{C}^\infty$ ) à l'expression de  $f$  obtenue en **Q 21.** On a

$$\forall x \in ]-1; +\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x) dt,$$

où la fonction  $\varphi : (t, x) \mapsto \frac{t^x - 1}{1 - t}$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\varphi$  est définie sur  $]0; 1[ \times ]-1; +\infty[$  ;
- pour tout  $x > -1$ , la fonction  $t \mapsto \varphi(t, x)$  est intégrable sur  $]0; 1[$  (c'est une conséquence du théorème d'intégration terme à terme appliqué en **Q 21.**) ;
- pour tout  $t \in ]0; 1[$ , la fonction  $x \mapsto \varphi(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; +\infty[$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) = \frac{\ln^k(t) t^x}{1 - t};$$

- pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous avons une majoration uniforme locale de  $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}$  :

$$\forall a > -1, \forall (t, x) \in ]0; 1[ \times [a; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \frac{t^a |\ln(t)|^k}{1 - t},$$

et la fonction  $\psi_{k,a} : t \mapsto \frac{t^a |\ln(t)|^k}{1 - t}$  est continue et intégrable sur  $]0; 1[$ , puisque :

- au voisinage de 0,  $\psi_{k,a}(t) \underset{0^+}{\sim} t^a |\ln(t)|^k = o_{0^+}(t^\beta)$ , pour tout  $\beta \in ]-1; a[$ , donc  $\psi_{k,a}$  est intégrable en 0 ;
- au voisinage de 1,  $\psi_{k,a}(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{|\ln(t)|^k}{1-t} \underset{1^-}{\sim} \frac{|t-1|^k}{1-t} = (1-t)^{k-1}$ , donc  $\psi_{k,a}$  se prolonge continûment en 1 (puisque  $k-1 \geq 0$ ), ce qui montre son intégrabilité en 1.

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, la fonction  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; +\infty[$ , et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]-1; +\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) dt = \int_0^1 \frac{\ln^k(t) t^x}{1 - t} dt.$$

En évaluant en  $x = 0$ , on obtient donc l'expression intégrale :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{(-1)^k k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 \frac{\ln(t)^k}{1 - t} dt.$$

**Q 23.** Dans l'intégrale précédemment obtenue, on utilise le changement de variable  $u \mapsto e^{-u}$ , qui est une bijection strictement décroissante de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0; +\infty[$  dans  $]0; 1[$  : en posant  $t = e^{-u}$ , on a  $dt = -e^{-u} du$ , donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)^k}{1 - t} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{(-u)^k}{1 - e^{-u}} (-e^{-u}) du = (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u - 1} du.$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u - 1} du.$$

### III Probabilités

**Q 24.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{1}{\zeta(x)n^x} \geq 0$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{\zeta(x)}{\zeta(x)} = 1$ , donc on définit bien une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}^*$  en posant  $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q 25.** La variable aléatoire  $X$  précédemment définie admet une espérance finie si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X = n)$  converge absolument. Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |n\mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-1}}$ , cette convergence absolue a lieu si et seulement si  $x - 1 > 1$ , c'est-à-dire  $x > 2$ . Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}.$$

**Q 26.** D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire  $X^k$  possède une espérance finie si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} n^k\mathbb{P}(X = n)$  converge absolument.

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |n^k\mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-k}}$ , cette convergence absolue a lieu si et seulement si  $x - k > 1$ , c'est-à-dire  $x > k + 1$ . Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}} = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}.$$

**Q 27.** Lorsque  $x > 3$ , la variable  $X^2$  admet une espérance finie (d'après **Q 26.**), donc  $X$  possède une variance finie, qui vaut d'après la formule de Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\zeta(x-2)}{\zeta(x)} - \left(\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}\right)^2 = \frac{\zeta(x)\zeta(x-2) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

**Q 28.** Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ . L'événement  $(X \in a\mathbb{N}^*)$  se décompose en réunion dénombrable disjointe :

$$(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = an),$$

donc par  $\sigma$ -additivité, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = an) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)(an)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \zeta(x) = \frac{1}{a^x}.$$

**Q 29.** Soit  $I$  une quelconque partie non vide de l'ensemble d'indices  $\{1, \dots, n\}$ .

L'événement  $\bigcap_{i \in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)$  est réalisé si et seulement si  $q_i$  divise  $X$  pour tout  $i \in I$ . Les  $q_i$  ( $i \in I$ ) étant des nombres premiers distincts, cela équivaut à  $\prod_{i \in I} q_i$  divise  $X$ . Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}\left(X \in \left(\prod_{i \in I} q_i\right)\mathbb{N}^*\right).$$

D'après **Q 28.**, on sait calculer cette probabilité :

$$\mathbb{P}\left(X \in \left(\prod_{i \in I} q_i\right)\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i \in I} q_i\right)^x} = \prod_{i \in I} \frac{1}{q_i^x} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in q_i\mathbb{N}^*).$$

On a donc  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in q_i\mathbb{N}^*)$  pour toute partie non vide  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , ce qui prouve l'indépendance mutuelle des événements  $(X \in q_k\mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$ .

**Q 30.** La suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  est décroissante pour l'inclusion puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_{n+1} = B_n \cap (X \notin p_{n+1}\mathbb{N}^*) \subset B_n.$$

D'après le théorème de continuité décroissante d'une probabilité, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left( \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right) \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right).$$

De plus, l'événement  $\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)$  est réalisé si et seulement si  $X$  n'est multiple d'aucun nombre premier, c'est-à-dire si et seulement si  $X = 1$  (d'après les rappels d'arithmétique, tous les entiers  $a \geq 2$  sont multiples d'au moins un nombre premier).

D'où  $\mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right) = \mathbb{P}(X = 1)$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$ .

Ensuite, on peut calculer explicitement  $\mathbb{P}(B_n)$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'indépendance mutuelle des événements  $(X \in p_k \mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$  établie en **Q 29.** implique l'indépendance mutuelle de leurs complémentaires  $(X \notin p_k \mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X \notin p_k \mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X \in p_k \mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{p_k^x} \right).$$

Finalement, l'égalité  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$  se réécrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{p_k^x} \right) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(x)1^x} = \frac{1}{\zeta(x)},$$

ce qui est l'égalité voulue.

**Q 31.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'événement  $D_k = (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k \mathbb{N}^*)$  est réalisé si et seulement si  $X$  ou  $Y$  n'est pas multiple du nombre premier  $p_k$ , c'est-à-dire si  $p_k$  ne divise pas  $X$  et  $Y$  simultanément. On en déduit  $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k$ , donc aussi

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left( \bigcap_{k=1}^n D_k \right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

La suite  $(C_n)_{n \geq 1}$  étant décroissante pour l'inclusion (tout comme dans la question précédente), on obtient par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

Calculons maintenant  $\mathbb{P}(C_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les événements  $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont mutuellement indépendants car leurs complémentaires le sont. En effet,  $\overline{D_k} = (X \in p_k \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k \mathbb{N}^*)$ , donc pour toute partie  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} \overline{D_i} \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} (X \in p_i \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i \mathbb{N}^*) \right) = \mathbb{P} \left( \left( X \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* \right) \cap \left( Y \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* \right) \right),$$

donc par indépendance des variables  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} \overline{D_i} \right) = \mathbb{P} \left( X \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* \right) \times \mathbb{P} \left( Y \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} (X \in p_i \mathbb{N}^*) \right) \times \mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} (Y \in p_i \mathbb{N}^*) \right),$$

et en utilisant **Q 29.**, on déduit alors

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} \overline{D_i} \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in p_i \mathbb{N}^*) \times \prod_{i \in I} \mathbb{P}(Y \in p_i \mathbb{N}^*) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}((X \in p_i \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i \mathbb{N}^*)) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(\overline{D_i}).$$

Cette indépendance mutuelle des  $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$  entraîne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(C_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(D_k) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(\overline{D_k})) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X \in p_k \mathbb{N}^*) \mathbb{P}(Y \in p_k \mathbb{N}^*)).$$

Mais  $X$  et  $Y$  suivent la même loi zêta de paramètre  $x$ , donc d'après **Q 28.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(C_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{p_k^x}\right)^2\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right).$$

On conclut en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  et en utilisant **Q 30.** avec  $2x$  à la place de  $x$  :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

**Q 32.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}^*$ . L'événement  $(W_n \in k\mathbb{N}^*)$  est réalisé si et seulement si  $k$  divise le pgcd de  $U_n$  et  $V_n$ , c'est-à-dire  $k$  divise simultanément  $U_n$  et  $V_n$ . On a donc

$$(W_n \in k\mathbb{N}^*) = (U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*),$$

ce qui amène par indépendance des variables  $U_n$  et  $V_n$  :

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*) \times \mathbb{P}(V_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2,$$

vu que  $U_n$  et  $V_n$  suivent la même loi. Enfin,  $U_n$  suit la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ , donc

$$\mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*) = \frac{\#(k\mathbb{N}^* \cap \{1, \dots, n\})}{n}.$$

Puisque les éléments de  $k\mathbb{N}^* \cap \{1, \dots, n\}$  sont les  $kq$  avec  $1 \leq q \leq \frac{n}{k}$  et  $q$  entier, on en déduit que  $\#(k\mathbb{N}^* \cap \{1, \dots, n\}) = \lfloor n/k \rfloor$ , et donc

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

**Q 33.** Fixons un réel  $\varepsilon > 0$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $W_n$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}^*$ , donc la série  $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(W_n = k)$  converge et  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) = 1$  (en fait  $\mathbb{P}(W_n = k) = 0$  dès que  $k > n$ ). On a donc évidemment

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) = 1.$$

En passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^m \ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \leq 1.$$

- Pour établir que  $\sum_{k=1}^m \ell_k \geq 1 - \varepsilon$  à partir d'un certain rang  $M$ , on utilise une majoration uniforme en  $n$  du reste de la série  $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(W_n = k)$ . Puisque

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(W_n = k) \leq \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{k^2},$$

on en déduit :

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = R_m$$

(puisque  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  converge, le reste  $R_m$  est bien défini et on a  $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m = 0$ ), et donc

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) = 1 - \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - R_m.$$

On considère alors un entier  $M \geq 1$  tel que  $\forall m \geq M, 0 \leq R_m \leq \varepsilon$ . Dès lors :

$$\forall m \geq M, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon.$$

En passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient enfin

$$\forall m \geq M, \quad \sum_{k=1}^m \ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon.$$

Finalement, on a bien l'existence d'un entier  $M$  tel que  $\forall m \geq M, \sum_{k=1}^m \ell_k \in [1 - \varepsilon; 1]$ .

**Q 34.** La question précédente montre que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \ell_k = 1$ . Donc la série à termes positifs  $\sum_{k \geq 1} \ell_k$  converge et  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$ . La suite  $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définit donc bien une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .

**Q 35.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}$  (cela se montre facilement à partir de l'encadrement  $\frac{n}{k} - 1 < \lfloor n/k \rfloor \leq \frac{n}{k}$ ). D'après **Q 28.**, on a donc

$$\mathbb{P}(W \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k^2} = \mathbb{P}(X \in k\mathbb{N}^*),$$

où  $X$  est n'importe quelle variable aléatoire suivant la loi zêta de paramètre  $x = 2$ . Ceci montre (en vertu du résultat admis) que  $W$  suit elle-même une loi zêta de paramètre  $x = 2$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(W = k) = \frac{1}{\zeta(2)k^2}.$$

En considérant l'événement  $(W = 1)$ , on a la relation  $\mathbb{P}(W = 1) = \frac{1}{\zeta(2)}$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \wedge V_n = 1) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Interprétation : si on choisit indépendamment deux nombres au hasard entre 1 et  $n$ , la probabilité que ces deux nombres soient "premiers entre eux" (i.e. sans diviseur commun autre que 1) tend vers  $\frac{6}{\pi^2} \simeq 0,61$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .